Algunes consideracions matemàtiques al voltant del Sistema Mètric Decimal

Florencio Burrel
Escola de Matemàtiques de la Marina Alta

Imaginem que estem vivint a Espanya, o en un altre país europeu on s'instaurà el sistema mètric decimal, al segle XIX. Que portem tota la vida mesurant i pesant amb unitats utilitzades al nostre voltant des d'abans que nasquèssem... I, de sobte, el ministre d'Economia de torn publica un edicte per informar a tot el país que, a partir del 19 de juliol de l'any 1853, l'Estat deixarà de mesurar amb vares castellanes, toeses i unes altres unitats de mesura utilitzades a cada comarca, i adoptarà com a unitat de mesura de longitud el metre. A més, també hi haurà una nova mesura de pes que s'anomenarà *gram* (al principi es definí *el greu*, que equivalia al quilogram) i de capacitat es prendrà com a unitat de referència *el litre*. Posteriorment es prengueren altres unitats per a altres activitats de mesura noves. Sens dubte, la implantació del Sistema Mètric Decimal hagué de ser una gran revolució per als ciutadans. Encara que quedà amagada per altres grans esdeveniments del moment, la seua influència en la vida de les persones s'aprecia quan pensem en les vacil·lacions que tingueren molts països a acceptar-la.

No només s'imposaven noms nous d'unitats, sinó que també era nova les seues dimensions. Però el més complicat fou que apareixien múltiples i divisors diferents dels que s'havien utilitzat fins aleshores. És probable que les principals dificultats aparegueren en intentar que els ciutadans entenguessen i feren servir aquests conceptes nous.

El motiu principal del canvi era evitar la varietat d'unitats distintes que s'utilitzaven a cada comarca de cada país, així com la diversitat de divisions i subdivisions que calia utilitzar. Per exemple, una mesura de longitud coneguda als àmbits internacionals era la toesa francesa que mesura 6 peus, un peu era 12 polzades, una polzada 12 línies i 1 línia 12 pistes. Està clar que aquestes subdivisions tenien el fi de facilitar les particions que es feien de la unitat. Per exemple, si 1 toesa són 6 peus, mitja toesa seran 3 peus, 1/3 de toesa 2 peus i 2/3 de toesa 4 peus; tanmateix, 1/4 de toesa no seria un nombre enter de peus ja que 4 no és divisor de 6. Al llarg de la història, sempre fou important triar una base de numeració que tingués el major nombre possible de divisors.

Però no només s'havia de contemplar aqueixa propietat, calia també considerar altres característiques que facilitaren l'ús de quantitats complexes. Una característica era que aqueix nombre de divisions no fos ni tan petit que permetera poques possibilitats de divisió, ni tan gran que donàs lloc a tantes subdivisions que fes complicat el seu maneig. Tradicionalment no se n'han fet menys de 6 subdivisions, ni tampoc més de 100. Una altra propietat important era que les divisions permetessen el maneig còmode d'operacions amb ells; és possible que fos decisiva aquesta característica a l'hora de triar el sistema de numeració adoptat.

No cap dubte que serà fonamental triar quantes subdivisions fem de la unitat de manera que facilitem els càlculs amb quantitats complexes (per exemple: 7'6 metres, en forma complexa s'escriu 7 metres i 6 decímetres). No és difícil sumar o restar aquest tipus de quantitats, però es complica una mica més si fem altres operacions més complexes, com ara, multiplicacions i divisions.

Per exemple, ens plantegem una faena bastant freqüent: calcular la superfície d'un quadrat de costat 1 toesa i 4 peus.

Sabem que l'àrea d'un quadrat s'obté multiplicant el costat per ell mateix. Però, com en aquest cas intervenen dues unitats diferents, serà convenient transformar abans aquesta quantitat, en forma fraccionària, o bé en forma decimal.

Per operar amb fraccions farem la transformació indicada anteriorment: ja que 4 peus són 2/3 de toesa, tindrem que 1 toesa i 4 peus seran 1+2/3 toesas que, si fem la suma, ens donarà que el costat del quadrat mesurarà 5/3 de toesa.

Multiplicant per ella mateix aqueixa quantitat per calcular l'àrea, tenim 5/3 x 5/3=25/9 toeses quadrades, que pot presentar-se com un nombre mixt mitjançant una divisió entera

25/9 = 2 + 7/9 toeses quadrades

o en forma decimal, 2,777...,

és a dir, 2 + 0,777... toeses cuadrades.

Una toesa quadrada es l'àrea d'un quadrat de costat 1 toesa. A més, com 1 toesa són 6 peus, 1 toesa quadrada tindrà 6 x 6 = 36 peus quadrats.

Ens preguntem ara quants peus quadrats són 0,777... toeses quadrades, o 7/9 de toesa quadrada: Atès que 1 toesa quadrada són 36 peus quadrats, caldrà multiplicar 7/9 per 36, la qual cosa ens donarà 28 peus quadrats. Així que el nostre quadrat mesurarà

2 toeses quadrades i 28 peus quadrats.

Una altra manera será utilitzant nombres decimals: per transformar 1 toesa 4 peus en expressió decimal hem de considerar, com ho hem fet abans, que 4 peus són 2/3 de toesa, i en forma decimal seran 0,666... toeses. És a dir, hem considerat com a longitud del costat el seu valor decimal, 1,666... toeses, en comptes del fraccionari 5/3. Però, atés que en aquell temps no usaven calculadores, n'hauríem pres una aproximació, per exemple 1,666. En aquest cas el seu quadrat seria 2,775556, de la qual cosa deduïm que tindríem 2 toeses quadrades senceres i 0,775556 de toesa quadrada.

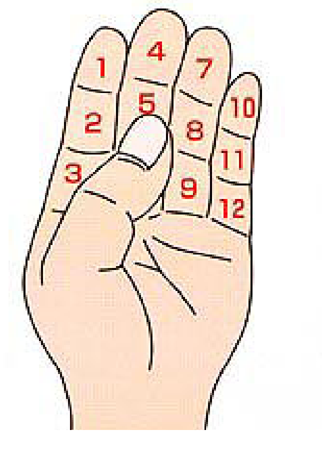
A continuació, per obtenir quants peus quadrats és la part decimal, multiplicaríem 0,775556 x 36, que serien 27,920016 peus quadrats. El resultat és 2 toeses quadrades i 27,920016 peus quadrats.

Si comparem amb el resultat obtingut usant fraccions, hi ha un error de 28 - 27,920016 = 0,079984 peus quadrats. (Podríem continuar veient quantes polzades quadrades són aquests peus quadrats, etc.).

Afortunadament, ja portava molt de temps utilitzant-se el sistema de numeració decimal.

Sistema decimal i sistema sexagesimal

Molts sistemes de numeració estan basats en característiques del nostre cos, que és la ferramenta que tenim més a mà. Parlant de mans, els sistemes més utilitzats han estat els basats en les seues característiques: el sistema decimal està en correspondència clara amb els dits de les mans. L'ús del sistema duodecimal (base dotze) s'explica si es compta assenyalant amb el dit polze cadascuna de les falanges dels altres quatre dits; se sol començar pel menovell. Però, si cada vegada que es realitza aquest recompte s'alça un dit de l'altra mà es pot comptar fins a seixanta.



El sistema decimal està en correspondència clara amb els deu dits de les mans.

El sistema duodecimal s'explica si comptem assenyalant amb el dit polze cadascuna de les falanges dels altres quatre dits.

La numeració decimal ha estat utilitzada en cultures nombroses: babilònica, índia, egípcia, grega, romana, maia... Començà a cobrar avantatge respecte a la resta arran de l'ús del nombre zero, que facilità la numeració posicional, on cada dígit té un valor que depèn de la seua posició respecte a la resta. Començà a ser coneguda a Europa cap al segle XIII, portada pels àrabs des de l'Índia, però no arribà a escriure's com ara, amb punt o coma de separació, fins el segle XVII.

Per a adoptar el sistema decimal hi havia molts arguments, però no cap dubte que en fou el més important el fet de ser fàcilment manipulable per a les operacions, amb el fet d'haver-se estés molt. Encara que a un ciutadà de l'època no li resultava familiar multiplicar nombres decimals entre si, es venien manejant en els ambient cultes des del segle anterior. El matemàtic respectat Vieta en recomanava l'ús el 1579 d'aquesta manera:

«Els sexagesimals i els seixantes han de ser usats rarament o no mai en la matemàtica, mentre que els mil·lèsims i els milers, els centèsims i els cents, els dècims i els deus, i les progressions semblants, ascendents i descendents, cal usar-los freqüentment i, encara més, exclusivament.»

No cal dir que en els temps en què aquesta idea sorgí no existien, per descomptat, calculadores que ajudaren els científics en la realització de càlculs complicats. En certes àrees, com en l'astronomia, per exemple, els càlculs requerien la màxima precisió possible. Els nombres decimals s'usaren finalment no només per representar fraccions decimals, sinó qualsevol fracció en general, la qual cosa fou un gran avanç en el coneixement i estudi dels nombres amb decimals infinits.

Però les fraccions es coneixien i utilitzaven a Babilònia, especialment les fraccions unitàries, vinculades al sistema sexagesimal. Amb l'adopció del sistema decimal van desapareixent els sistemes basats en les particions que, aparentment, eren més pràctics. En efecte, el principal defecte del sistema decimal és que el nombre 10, la seua base, només es pot dividir per 2 i per 5. Això condueix que 1/3 de litre no és una quantitat exacta de centímetres cúbics, la qual cosa porta que de cada 3 botelles de 33 centilitres (un terç de cervesa) desapareix 1cl ja que 33 x 3 = 99 cl. Amb la qual cosa, de cada 3 milions de botelles desapareixen 1 milió de centilitres, això és 10000 litres.

Hi havia uns altres sistemes que permetien més possibilitats de partició a causa que les seues bases tenien més divisors. Un dels més utilitzats era el sistema de base 60, anomenat sexagesimal. Encara s'utilitza en el recompte del temps, cada hora té 60 minuts i cada minut 60 segons, i en la mesura d'angles en graus, minuts i segons. Fou molt utilitzat precisament en pobles destacats en la seua època pel seu impuls a la cultura, com ara, Mesopotàmia i Egipte.

Què té aquest sistema que el fa tan interessant?

Una característica és que es pot comptar fins a seixanta usant els dits de les mans, tal com s'ha indicat anteriorment. L'altra característica és la quantitat de divisors que té: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20 i 30, que permeten fer totes aquestes particions o subdivisions de la base. És molt evident partir un pastís per la meitat, en quarts i en vuitens, però més difícil és partir-lo en terços, encara que d'aquí es parteix en sisens o dotzens amb facilitat. Això proporciona gran quantitat de divisions per a permetre mesuraments molt exactes.

Aquestes possibilitats de partició impulsaren l'ús de les fraccions unitàries (que tenen la unitat per numerador), especialment a Egipte. De fet, en molts ambients se les anomena *fraccions egípcies*. Tingueren tanta importància que només s'utilitzava aquest tipus de fraccions, la resta no es coneixien o no els interessaven ja que sempre es pot trobar fraccions unitàries la suma de les quals siga una fracció decimal donada.

Volem fer, per exemple, la descomposició de la fracció 69/70 en suma de fraccions unitàries.

Per cercar el primer terme, prenem la fracció inversa 70/69 i seguim el procediment següent:

a) Fem la descomposició de 70/69 en nombre mixt=1+1/69. La part entera 1 ens diu que el primer sumand serà 1/2, que és la primera de les fraccions unitàries.

b) Restem 69/70–1/2=34/70 i repetim el procés amb aquesta fracció.

c) 70/34=2+2/34, el 2 ens indica que el sumand següent és 1/3, la segona fracció unitària.

d) Restem 34/70–1/3=32/210, que simplificant dona 16/105 a la qual tornem a aplicar el procés.

e) 105/16=6+9/16, el següent sumand serà 1/7.

e) Restem 16/105–1/7=1/105

Concloem que 69/70=1/2+1/3+1/7+1/105

En cas de ser major el numerador que el denominador es transforma abans en nombre mixt i s'aplica aquest procés a la part fraccionària.

Aquest procediment, en matemàtiques, s'anomena *algorisme voraç*. Els escribes egipcis foren molt hàbils en descompondre fraccions en unitàries. Aquest no era l'únic procediment i, atés que una fracció pot tenir descomposicions diferents, seleccionaven la descomposició més adequada a cada moment.

Encara se segueix utilitzant en matemàtiques les fraccions unitàries. Per exemple: la sèrie harmònica

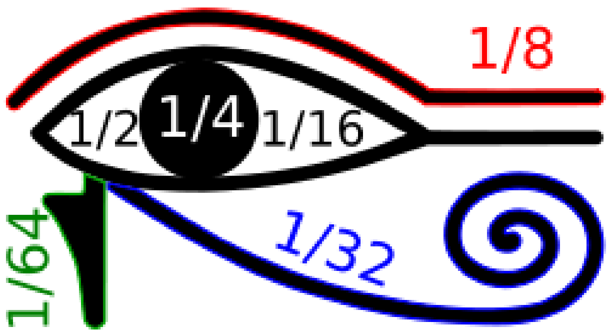
1+1/2+1/3+1/4+1/6+...,

molt important en música, ja que cada sumand correspon a la longitud d'ona dels harmònics que emet una corda que vibra. És també molt utilitzada en matemàtiques per analitzar sèries divergents (la suma de les quals tendeix a infinit).

La sèrie geomètrica

1+1/2+1/4+1/8+1/16+...,

al contrari que l'anterior és convergent perquè la seua suma és 2. Dona nom a les progressions geomètriques i és important l'estudi de sèries infinites. A més, també era coneguda en la mitologia egípcia per indicar els seus primers termes la forma en què fou seccionat l'ull d'Horus en la guerra entre Horus i Seth.



Una altra sèrie coneguda és la

1/2+1/3+1/7+1/43+...,

els denominadors dels quals s'obtenen de la successió de Sylvester, 2, 3, 7, 43,... on cada terme és el resultat de multiplicar els anteriors entre si i sumar 1. Aquesta sèrie té la qualitat que convergeix cap a 1 molt ràpidament i és utilitzada en la Teoria de la Mesura.

Hi ha unes altres aplicacions importants, tant en matemàtiques pures (descomposició de fraccions contínues), com en les aplicades (mètode *simplex* en Programació lineal), però caldria estendre's massa.