Ferraments matemàtics de la medicina del cor

Florencio Burrel
Professor de l'Escola de Matemàtiques de la Marina Alta

És difícil explicar les matemàtiques que utilitzen els investigadors de la medicina. I més difícil encara fer-ho intel·ligible per a un profà en ambdues ciències. Per això, prendrem dos camins: per una banda, veurem un cas d'investigació, centrada en les idees de Torrent Guasp (T-G), que ens presentarà com usar matemàtiques per simular el funcionament del cor. I, d'una altra banda, presentarem, d'una manera senzilla, alguns dels conceptes matemàtics que utilitza la investigació mèdica.

Un cas

Encara que no sol anomenar-se, també hi ha molts científics russos interessats en les idees de T-G sobre el cor. Ho demostra la investigació de Sergey F. Pravdin i d'altres, de la Universitat d'Ekateringburg (Rússia) i amb la col·laboració dels governs de Bèlgica i de Suècia, amb el títol *Mathematical model of the anatomy and fibre orientation field of the left ventricle of the heart* (2013).

Aquests matemàtics, basant-se en els treballs de Pettigrew, Streeter, Hant i d'altres autors han cercat un model matemàtic del sistema fisiològic del cor que permet els investigadors estudiar els mecanismes de l'activitat elèctrica i mecànica del ventricle esquerre LV (*Left Ventricule*) d'un cor normal. És a dir, trobar fórmules analítiques explícites que permeten obtenir una expressió matemàtica que represente el LV i la direcció de la seua banda de fibres, per posteriorment comparar-les amb les obtingudes experimentalment.

Partint dels treballs de Torrent Guasp, consideren que el LV és com un conjunt de superfícies espirals idèntiques, cada una de les quals pot produir-se des de l'altra per rotació al voltant d'un eix vertical. Les fibres musculars del LV del cor estan disposades com enrotllades formant una banda al voltant d'un con, però seguint una inclinació d'uns 60^0 respecte a la base d'aquest con. Aquesta imatge ens és útil per a fer un model matemàtic del LV, el més aproximat possible i que permeta ser descrit mitjançant equacions.

Per a això, comença amb un semicercle amb un conjunt de cordes (vegeu fig.1), tal com el presentà Streeter al seu treball de 1979, anomenat *Gross morfology and fiber geometry of the heart*, en què s'inspira en els treballs de Torrent Guasp, de qui fou un dels primers valedors a USA. Les cordes són segments de rectes d'equació $Y = \text{constant}$.

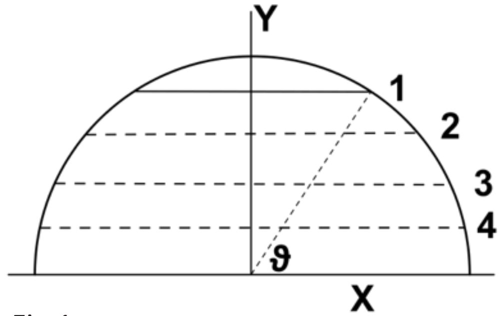

Fig.1

Cada fibra dibuixa un helicoide entorn a l'eix del con, la qual cosa aconsella treballar amb coordenades polars (ρ, θ). Un punt P de la circumferència, de coordenades cartesianes (x_o, y_o), les coordenades polars seran:

$$\theta = \arc \sin(y_o / x_o) \qquad \rho = x_o / \sin\theta$$

Si enrotllem el semicercle com si fos una paperina de xurros, adopta una forma cònica irregular. Està matemàticament provat que és possible embolicar un con amb un sector circular.

Imaginem que retallem el semicercle i l'enrotllem al voltant del con (parcialment o completament), de manera que el vèrtex del con coincidesca amb el centre de la semicircumferència. L'angle del sector retallat, que ja hem dit que és un semicercle, l'anomenarem ω. En el cas de ser $\omega = \pi$, tenim el semicercle tancant-se completament al voltant del con. A la nostra simulació del LV considerarem $\omega > \pi$, ja que la banda de fibres fa una mica més d'una volta al voltant de l'eix.

Com es veu a la figura 2, les cordes s'han convertit en una successió de corbes que posteriorment caldrà rotar simulant els músculs i cercant l'orientació necessària per aconseguir una primera aproximació a la forma del LV.

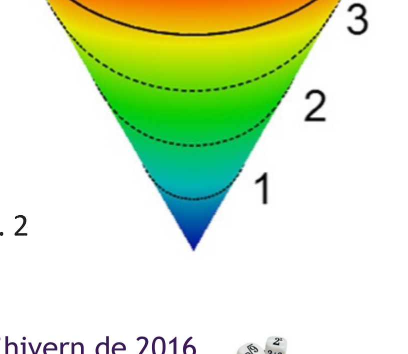

Fig. 2

Ara cal convertir el con en una superfície més complexa mitjançant una transformació no-lineal. Els radis del semicercle no es corbaran com les cordes al realitzar l'embolcall, es mantindran rectes resultant ser les generatrius del con, que descriurem per la propietat θ = constant. La semicircumferència es transforma en la circumferència de la base del con. I el centre del cercle corresponent es converteix en l'àpex del con.

Analíticament, es parteix de les equacions del con en coordenades cilíndriques (vegeu apèndix), per posteriorment transformar-les en una sola equació en forma explícita.

El primer problema amb què hom es troba és que, encara que les cordes del semicercle es convertesquen en corbes sobre el con, per tal que simulen les miofibres de la banda, han de tenir una inclinació adequada (uns 60^0). Per aconseguir-ho, s'aplica aquest gir a l'equació obtinguda substituint X per $Y/\sin\theta$.

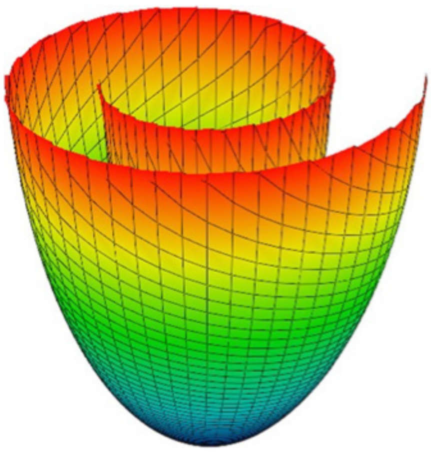

Fig. 3

Però necessitem superfícies espirals: a les primeres equacions del con es considerava $z = k\rho$, on k és una constant i per tant z no depén de l'angle θ. Si convertim la constant k en una funció de θ, aleshores es generarà una superfície espiral amb la mateixa orientació que les fibres miocàrdiques. Vegeu el resultat a la figura 3; a aquesta figura nova l'anomenarem **superfície pseudocònica**.

Però no hem de conformar-nos amb aquesta representació, ja que es tracta d'una superfície cònica, sense gruix. Cal suposar el LV format per una successió de superfícies limitades per l'endocardi i l'epicardi d'un gruix total determinat h, que oscilarà entre 0 i un valor que depén de la grandària del cor. Donant valors al paràmetre h van obtenint-se les capes que formen la banda miocàrdica.

A més, la terminació a l'àpex no ha de ser en punta, sinó mostrar una superfície arrodonida, fig. 3. Això es pot aconseguir corbant les generatrius al seu tram final (a l'apèndix veurem que hi ha altres maneres de fer-ho).

A la figura 4 es mostra una simulació de la zona desenvolupada de l'àpex.

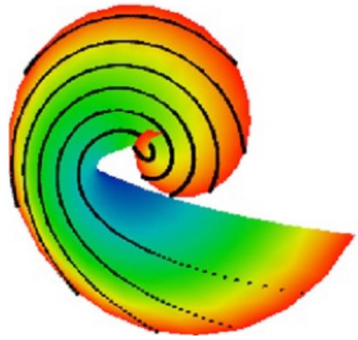

Fig. 4

Recursivitat i equacions en diferències

La recursivitat és un concepte fonamental en moltes de les aplicacions noves de les matemàtiques, i especialment en les que tenen relació amb la medicina i la biologia. Podem trobar-la en la programació d'ordinadors, robòtica i intel·ligència artificial, teoria del caos, fractals..., així com en equacions diferencials i en diferències. Justament aquests camps d'aplicació de les matemàtiques es troben entre els més utilitzats per la investigació mèdica actual. El concepte de recursivitat consisteix en processos que es contenen a ells mateixos, basats en la seua pròpia definició. En publicitat ha estat molt utilitzada una imatge com la de la fig. 5, que ens dóna una idea del concepte.

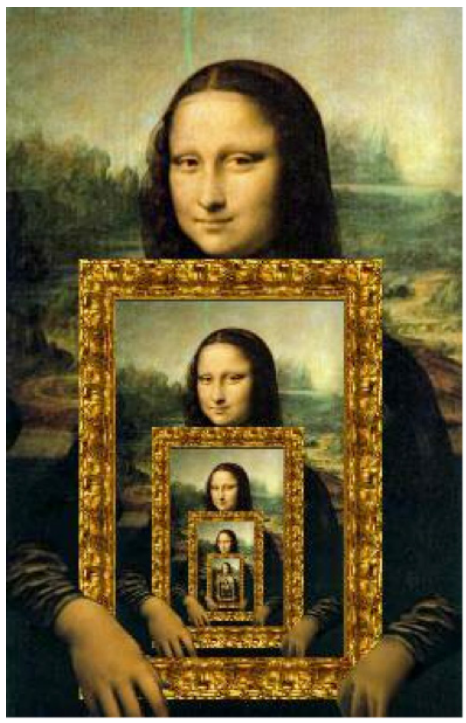

Fig. 5

El *Grupo Cero* de València ho defineix així: donat un problema P que tracta una informació d'un cert tipus i d'una certa grandària, l'anàlisi recursiva cerca reduir el problema P expressant el tractament de la informació en els mateixos termes aplicats a una informació d'igual tipus però de menor grandària.

És una eina molt poderosa en els llenguatges de programació, ja que és molt senzill reproduir un missatge sempre amb les mateixes condicions, llevat d'alguna variació.

Nosaltres utilitzarem el concepte per simbolitzar el terme general d'algunes successions a partir d'altres termes. Per exemple, la successió dels nombres imparells 1, 3, 5, 7… queda definida per la condició que qualsevol terme s'obté sumant 2 a l'anterior, afegint la condició que la successió comença per 1.

Simbòlicament s'escriu:

$a_n = a_{n-1} + 2$, amb $a_1 = 1$.

Amb a_n representem el terme que ocupa el lloc n en la successió. Aquests tipus de successions són conegudes com progressions aritmètiques, el seu terme general sol presentar-se en una expressió depenent de n que en el nostre cas no ens ocupa.

És precisament la diferència entre dos termes consecutius el que ens dóna la que anomenem equació en diferències: $a_n - a_{n-1} = 2$

Continuant amb la successió dels nombres imparells, si restem a cada terme l'anterior, les diferències obtingudes són totes iguals a 2

1 , 3 , 5 , 7 , 9 …,

2 2 2 2 …

anomenades **diferències primeres**.

Vegem una altra successió, la formada a partir de la suma dels n primers nombres naturals,

$a_1 = 1$; $a_2 = 1 + 2 = 3$; $a_3 = 1 + 2 + 3 = 6$;

… $a_k = 1 + 2 + 3 + … + k$

També en aquest cas tenim un procés recursiu.

Les diferències primeres ja no són iguals, però si tornem a calcular les diferències entre elles (**diferències segones**), sí que ho són:

1 , 3, 6, 10, 15, …

2 , 3 , 4 , 5 diferències primeres

1 , 1 , 1 … diferències segones

Com veurem més endavant, la fórmula que representa a qualsevol terme de la successió és un polinomi de primer grau, si les diferències primeres són iguals, de segon grau, si ho són les diferències segones, i així successivament.

En el cas de la successió d'imparells anterior, tindrem una equació del tipus

$A n + B = a_n$

Donant valors a n obtenim un sistema d'equacions que ens dóna la fórmula del terme general de la successió,

Per a $n = 1$, tenim $A + B = 1$

Per a $n = 2$, tenim $2 A + B = 3$

restant ambdues equacions, s'obté com a solució els valors: $A = 2$ i $B = -1$

La qual cosa ens dóna la fórmula del terme general de la successió de nombres imparells $a_n = 2n - 1$, com és ben sabut.

En el cas dels nombres triangulars, al ser iguals les diferències segones, el terme general és de segon grau, de la forma:

$a_n = A n^2 + B n + C$

per la qual cosa, per obtenir els coeficients, seran necessàries tres equacions que resulten al donar valors a n

$n = 1$ $1 = A + B + C$

$n = 2$ ……………………$3 = 4 A + 2 B + C$

$n = 3$ ……………………$6 = 9 A + 3 B + C$

restant la primera equació a les altres dues tenim

$2 = 3 A + B$

$5 = 8 A + 2 B$

Ara restem la primera multiplicada per 2 a la segona i tenim

$1 = 2 A$, per la qual cosa $A = ½$

I substituint a la primera equació,

$2 = 3 . ½ + B$

Per la qual cosa $B = ½$, i , substituint, $C = 0$, queda

$a_n = ½ n^2 + ½ n = (n^2 + n) / 2 = n (n + 1) / 2$,

Que és la coneguda fórmula de la suma dels n primers nombres naturals.

La formació d'aquestes successions diem que és recursiva pel fet que cada terme és obtingut pel mateix procés usat per calcular l'anterior.

Les equacions en diferències es poden considerar com el primer pas cap a les equacions diferencials; aquests dos conceptes, junt amb la recursivitat, són fonamentals en la modelització i en la robòtica. Han d'estudiar-se simultàniament atés que estan relacionats entre sí.

APÈNDIX

Alguns models elementals.

Equacions paramètriques del con: Aquesta és una superfície de les anomenades de revolució, que s'engendra a partir d'una recta inclinada girant al voltant de l'eix, que podem fer coincidir amb l'eix OZ de coordenades. Considerem el vèrtex del con a l'origen de coordenades, aleshores les equacions paramètriques del con són:

$x = u \cos v$ $y = u \sin v$ $z = u$

Paraboloide de revolució: Per obtenir la curvatura a l'àpex, en lloc de corbar les generatrius del con, es pot aconseguir mitjançant un paraboloide de revolució, és a dir una paràbola que gira al voltant del seu eix de simetria. Si es considera l'eix Z com l'eix de simetria, les equacions són:

$x = u \cos v$ $y = u \sin v$ $z = u^2$

Hèlix cònica: Les equacions paramètriques de l'hèlix cònica, són:

$x = t \cos t$ $y = t \sin t$ $z = t/\tan \alpha$

on α és l'angle els costats del qual són la generatriu i l'altura del con determinat per l'hèlix.