

El llegat científic de Vicent Caselles

Un recorregut breu per l'obra científica de **Vicent Caselles**, i la seva importància en matemàtiques, en visió per ordinador i en tractament d'imatge.

Enric Meinhardt-Llopis

Maitre de Conférences a l'École Normale supérieure de Cachan

1 Introducció

Als cursos de física i de matemàtiques de totes les universitats del món s'estudia l'equació de la calor, que descriu com evoluciona la temperatura d'un objecte sotmès a fonts de calor. Una propietat d'aquesta equació és que té velocitat de propagació infinita: si posem la punta d'una cullera en aigua bullent, tota la cullera sencera es comença a escalfar instantàniament. La part que està dins de l'aigua s'escalfa molt de pressa i l'altre extrem s'escalfa molt a poc a poc, però tots els punts de la cullera es comencen a escalfar al mateix moment. Aquesta propietat és incompatible amb la teoria de la relativitat, que diu que la informació no pot viatjar més ràpid que la velocitat de la llum. L'equació de la calor i la teoria de la relativitat no poden ser correctes alhora. Quina és la bona, doncs?

Vet aquí un dels problemes que treien la son a Vicent Caselles. Ell va resoldre'l, des del punt de vista matemàtic, caracteritzant en detall les solucions de l'equació de la calor relativista, coneguda pels físics des de feia temps però que encara no havia rebut un tractament matemàtic formal.

Però això és només un exemple dels seus treballs. En aquest text, fem un recorregut breu per la seva obra científica. És una obra enorme i variada. Una obra que abasta des de les matemàtiques pures fins a les aplicacions tecnològiques més actuals, passant per la física, l'estudi matemàtic de l'erosió, la visió per ordinador, el tractament d'imatge, i el processament de vídeo.

La gran extensió d'aquesta obra no impedeix que tingui un fil conductor, guiat per la sorprenent unitat de les matemàtiques: Les mateixes equacions que serveixen per a descriure els corrents tèrmics en l'espai intergalàctic es fan servir per restaurar una fotografia, o augmentar la resolució temporal d'un vídeo. Vicent Caselles veia de seguida aquestes connexions i quan reconeixia un patró de comportament era capaç d'aplicar tot el seu coneixement al nou problema.

Abans de començar, una nota sobre els col·laboradors. Estem parlant d'un autor que rarament signava els articles tot sol. Gairebé sempre ho feia conjuntament amb altres persones, professors i estudiants amb qui treballava. Una bonica tradició matemàtica obliga a posar els noms de tots els autors d'un article per ordre alfabètic, i es considera que tots ells tenen una contribució equivalent. Per a bona part dels coautors, doncs, signar un article amb Vicent Caselles era un honor; i especialment per als estudiants era un punt de partida immillorable per a iniciar una carrera científica. Aquí, per facilitar l'exposició, parlarem de les contribucions de Vicent Caselles en singular, però segurament a ell no li hagués agradat aquest llenguatge, i voldria que en cada cas es parlés de tots els co-autors en igualtat de condicions.


Obra matemàtica: equacions diferencials i aplicacions

Un bon punt de partida per a endinsar-se en l'obra matemàtica de Vicent Caselles és la monografia publicada el 2003 conjuntament amb els matemàtics valencians Fuen-santa Andreu Vaillo i José María Mazón. En aquest llibre monumental es descriu la teoria completa d'una classe força gran d'equacions diferencials, i s'introdueixen algunes de les seves aplicacions a problemes de tractament d'imatge. Alguns casos particulars d'aquestes equacions ja s'havien utilitzat abans en tractament d'imatge, de manera heurística, i els treballs recollits en aquest llibre donen una justificació matemàtica. Aquest esquema de funcionament és habitual en la ciència: primer els físics o els enginyers introdueixen uns models matemàtics i els fan servir de manera informal. Després arriben els matemàtics i demostren que els models són correctes, i que molts models que es creien diferents són explicats pel mateix teorema. Finalment, els físics i els enginyers reprenen aquests resultats i els apliquen a nous contextos.

Podríem dir que Vicent Caselles estava als tres llocs alhora: proposant models, demostrant teoremes, i aplicant models vells a problemes nous.

La monografia del 2003 desenvolupa la teoria de les equacions diferencials que provenen de "problemes de minimització de creixement lineal". No entrarem en detalls tècnics, però farem un breu apunt sobre què vol dir resoldre una equació diferencial. Concretament, resoldre una equació diferencial vol dir aquestes cinc coses:

1. Definir de manera precisa la noció de solució.
2. Demostrar l'existència d'almenys una solució.
3. Demostrar l'unicitat de les solucions, en cas que existeixin.
4. Demostrar la dependència suau de la solució respecte les dades.
5. Donar un mètode de càlcul per trobar les solucions en un ordinador.



L'obra de Vicent Caselles és enorme i variada: abasta des de les matemàtiques pures fins a les aplicacions tecnològiques més actuals, passant per la física, l'estudi matemàtic de l'erosió, la visió per ordinador, el tractament d'imatge, i el processament de vídeo.

Curiosament, la major part del treball està en el primer punt: la definició de les solucions. De fet, en l'estil d'escriptura de Vicent Caselles, gairebé tot el contingut matemàtic està en la definició de les solucions, i els teoremes d'existència i unicitat són meres comprovacions. Aquestes comprovacions són immediates gràcies al fet que la solució s'ha definit de manera molt acurada. Especialment, resoldre una equació diferencial vol dir definir en quin espai de funcions es troben les seves solucions. Això no és estrany, si fem una analogia amb un exemple ben conegut: l'equació $x^2 = 2$. Hom sap que aquesta equació no té solució en els nombres racionals, però sí que en té en els nombres reals, que es van introduir justament per poder resoldre l'equació! Un cop completada l'enorme tasca de definir els nombres reals $x^2 = 2$, la solució d'aquesta equació és immediata, fins i tot tautològica $x = 2^{1/2}$. Aquest mateix joc de definicions i teoremes es reproduïx, amb una bellesa cristal·lina, en els articles d'equacions diferencials de Vicent Caselles. Primer veiem desfilant una panòpia d'espais funcionals, que serveixen per a definir les solucions, i finalment els teoremes d'existència i unicitat es basen en les eines habituals de l'anàlisi: multiplicació per una funció test, integració per parts i els resultats de convergència clàssics.

2.1 Variació total

La variació total és una mesura de la complexitat d'una funció (o d'una imatge, entesa com a funció). Per exemple, la variació total d'una funció constant és zero. Les

funcions de tipus fractal, amb oscil·lacions arbitràriament fines, tenen variació total infinita. Entre aquests dos extrems hi ha les funcions de variació finita, que són una de les eines bàsiques dels treballs de Vicent Caselles, tant en equacions diferencials com en tractament d'imatge. Intuitivament, si pensem en la funció com un mapa topogràfic, la variació total de la funció és la suma de les longituds de totes les corbes de nivell (cada corba ponderada pel seu "gruix", d'una manera molt precisa).

En una sèrie de treballs amb Luigi Ambrosio, Giovanni Bellettini, Matteo Novaga i Simon Masnou, entre d'altres, Vicent Caselles estudia diverses equacions associades a la variació total, algunes de les quals recollides a la monografia del 2003 com a casos particulars. Una branca interessant d'aquests treballs, interessant per ella sola, és l'estudi geomètric dels conjunts de perímetre finit, on la col·laboració amb els matemàtics italians i francesos anomenats més amunt ha obert nous camps de recerca que avui encara segueixen donant fruit.

Una ramificació de la variació total, estudiada entre d'altres amb Salvador Moll i Antonin Chambolle, és la variació total anisotròpica. La variació total clàssica n'és un cas particular en el pla Euclidià, però la versió anisotròpica està definida en espais molt més generals: les varietats de Riemann o de Finsler. Aquesta idea és clau en molts altres treballs de Vicent Caselles: quan hom té una construcció en el pla euclidià, sovint es pot transportar a espais més generals que tinguin una mètrica arbitrària. Això permet de modelitzar medis no homogenis, o afegir informació provinent d'una imatge.

2.2 Difusió no lineal

L'equació de la calor relativista, l'equació de difusió amb flux limitat o la difusió en mitjans porosos són encara més exemples d'equacions estudiades per Vicent Caselles i els seus col·laboradors; els matemàtics acabats de referir i, a més, José Antonio Carrillo i Juan Calvo. Totes aquestes equacions estan motivades per problemes físics, i en aquest treballs se'n fa un estudi teòric complet, demostrant els teoremes d'existència i unicitat; i també un estudi qualitatiu, descrivint famílies concretes de solucions i el seu comportament. Així, per exemple, s'hi descriu amb exemples precisos la propagació a velocitat finita de fronts de calor, fenomen que no s'observa en l'equació de la calor clàssica.

2.3 Problemes geomètrics

Imagineu que infla a poc a poc un globus dintre d'una capsula cúbica. Conforme s'infla, el globus toca les sis parets de la capsula i segueix creixent, acostant-se cada cop més a les arestes i als vèrtexs del cub. En un cert moment, el ràtio entre la superfície i el volum del globus és mínim. La forma del globus en aquest instant és el que s'anomena el conjunt de Cheeger del cub.

Juntament amb François Alter, Vicent Caselles va demostrar que el conjunt de Cheeger d'un objecte convex qualsevol és únic. Aquest resultat era una conjectura oberta des de feia anys. La demostració fa servir tècniques sorprenentment similars a les equacions diferencials comentades més amunt.



2.4 Xarxes de transport

Quina és la xarxa de carreteres òptima per connectar totes les ciutats d'un país? Quina és la millor instal·lació dels canals de reg per a un cultiu? Quina forma tenen els rius, rierols i torrents d'un paisatge muntanyós després de milions d'anys d'erosió? Quin patró geomètric segueixen les venes i les artèries d'un animal? I la xarxa de bronquis i bronquíols dels pulmons?

Tots aquests objectes estan descrits per les mateixes lleis, i el llenguatge matemàtic apropiat per a tractar-los és la teoria geomètrica de la mesura, una altra de les eines de treball quotidiana de Vicent Caselles, utilitzada sovint en els articles d'equacions diferencials. Els seus treballs sobre aquest tema, conjuntament amb Marc Bernot, estan descrits en una monografia i diversos articles, on es resolen problemes oberts i se'n plantegen de nous. Són particularment interessants les descripcions de les lleis d'escala dels arbres vasculars, que expliquen quanta longitud total de venes hi ha de cada diàmetre.

3 Obra tecnològica: tractament d'imatge i visió per ordinador

Fins ara hem parlat de les contribucions de Vicent Caselles a la matemàtica pura. Però ell es trobava igual de bé fent càlculs abstractes en una pissarra que mirant el resultat dels seus mètodes a la pantalla d'un ordinador. De fet, l'avaluació dels resultats experimentals era una part fonamental de la seva recerca: li permetia entendre els problemes a fons i suggerir-ne de nous, observant els defectes dels resultats.

3.1 Contorns actius

En els programes d'edició d'imatges i retoc fotogràfic, per exemple, Gimp o Photoshop, hi ha sempre una eina de "selecció intel·ligent". Quan l'usuari ressegueix aproximadament el contorn d'un objecte, aquesta eina permet moure la corba resseguida i ajustar-la exactament al contorn de l'objecte. Això permet seleccionar objectes grans ràpidament i de forma molt precisa.

Aquesta eina, descrita i implementada de manera heurística per altres autors, va ser formalitzada matemàticament per Vicent Caselles, Ron Kimmel i Guillermo Sapiro com un problema de mecànica clàssica. El principi de mínima acció de Maupertuis descriu la trajectòria d'un planeta en un camp gravitatori, la trajectòria d'un electró en un camp electromagnètic, o, més en general, la trajectòria d'un sistema físic en l'espai de fases. Segons d'aquest treball, la corba que calcula l'eina de selecció intel·ligent és també el resultat d'un principi de mínima acció i obeeix les mateixes equacions. El camp de forces ve determinat pel contingut de la imatge. Gràcies a aquesta formalització, s'han desenvolupat noves eines de selecció intel·ligent, anomenades contorns actius, amb moltes propietats desitjables: funcionen molt ràpid, permeten retrobar objectes amb varies components connexes, i fins i tot objectes tridimensionals en imatges mèdiques. Val a dir que aquest és l'article més popular de Vicent Caselles, amb més de quatre mil cites.

Un cop desenvolupats els contorns actius amb un llenguatge geomètric, hi ha altres aplicacions que sorgeixen



“ Estem parlant d'un autor que rarament signava els articles tot sol. Signar un article amb Vicent Caselles era un honor; i especialment per als estudiants era un punt de partida immillorable per a iniciar una carrera científica.

de forma natural. Per exemple, el principi de Maupertuis diu que les trajectòries són corbes de longitud mínima en una certa mètrica de Riemann. Això porta a considerar els conjunts de Cheeger en aquests espais. És a dir, els conjunts que minimitzen el ràtio entre el perímetre i l'àrea, on aquestes quantitats es calculen fent servir la mètrica de Riemann en comptes de la mètrica euclidiana del pla. Aquests conjunts de Cheeger anisotròpics també han vist aplicacions al tractament d'imatges en un treball conjunt amb Gabriele Facciolo.

3.2 Inpainting

Els restauradors de quadres i fotografies antigues es troben sovint amb el problema de la completació o *inpainting*. Hi ha una taca o un forat a la imatge i cal afegir colors per tapar el forat. Quins colors posar?

Una formalització axiomàtica d'aquest problema va ser proposada conjuntament amb Jean-Michel Morel i Catalina Sbert. Més endavant, els treballs amb Marcelo Bertalmío, Simon Masnou i Joan Verdera van proposar mètodes concrets d'*inpainting*, basats en els criteris que fan servir els restauradors professionals, però respectant els axiomes anteriors. Aquests treballs van revolucionar el problema de l'*inpainting*, i els algorismes que n'han sorgit són part dels programes d'edició d'imatges Gimp i Photoshop. La completació d'imatges és un tema que mai no va abandonar: un dels seus treballs més recents amb Pablo Arias donava una formalització variacional de mètodes de còpia i extensió de textures.

3.3 Teories de la visió

Si prenem una foto molt clara i una altra molt fosca del mateix objecte, reconeixem fàcilment que són el mateix. Però la intensitat dels colors pot ser completament diferent. Què tenen en comú ambdues imatges? Les corbes de nivell són les mateixes. Segons aquesta observació, les corbes de nivell són un objecte bàsic de la percepció visual. Juntament amb Andrés Solé, Bartomeu Coll i Pascal Monasse, Vicent Caselles va estudiar l'estructura en arbre de les corbes de nivell de les imatges i va proposar mètodes eficients per a codificar aquest arbre en un ordinador. També va definir operacions basades en les corbes de nivell, com els canvis de contrast locals i els filtres de gra. Aquests últims permeten d'eliminar les estructures petites de la imatge sense canviar gens ni mica les grans.

3.4 Invariants afins

Si prenem dues fotografies del mateix objecte des de diferents punts de vista reconeixem fàcilment que són el mateix. Però la forma dels objectes pot haver canviat molt. Què tenen en comú ambdues imatges? Hi ha una transformació afí entre elles.

L'estudi dels invariants afins és, per tant, un altre tema essencial en la visió per ordinador. Els treballs amb Coloma Ballester i Rida Sadek han fet un estudi exhaustiu dels invariants possibles que es poden definir per identificar dues imatges. Aquest estudi exhaustiu inclou com a casos particulars molts invariants afins utilitzats tradicionalment en visió, i uns quants de nous que tenen propietats interessants.

3.5 Teories del color

Repasant la llista d'articles de Vicent Caselles es veu que el color és una fascinació que l'ha acompanyat durant molts anys. Des dels primers treballs amb Gloria Haro, on es modelitzava la pèrdua de colors en la foscor, fins als treballs més recents amb Edoardo Provenzi on es formalitzen els models "retinex", s'han deixat caure sobre els problemes de color tota la maquinària matemàtica per obtenir resultats sorprenents.

Possiblement el problema més intrigant de tots aquests és la fusió d'imatges color i gris de resolucions diferents. Aquest és un problema tecnològic real: els satèl·lits d'observació terrestre transmeten imatges en blanc i negre de molt alta resolució acompanyades d'imatges en color de baixa resolució. Combinant la informació de les dues imatges de manera astuta, s'arriben a obtenir imatges en color d'alta resolució. Un treball per desenvolupar aquesta aplicació s'ha publicat conjuntament amb Bernard Rougé, expert en càmeres de l'agència espacial francesa.

3.6 Anàlisi i processament de vídeo

Els últims anys, Vicent Caselles va treballar molt activament amb projectes finançats per la indústria televisiva, motivats per l'edició i la post-producció de vídeo. Concretament, amb el seguiment d'objectes en vídeo, la detecció de logotips, la reconstrucció tridimensional en temps real de camps de futbol (amb els jugadors inclosos!), el canvi de resolució temporal d'un vídeo, i l'*inpainting* de vídeo. Tots aquests treballs concrets, utilitzats i molt preuats pel soci industrial, van tenir sempre una sortida en la forma d'articles presentats en congressos de tractament d'imatge.

4 Conclusió

Hem recorregut ràpidament una obra científica excepcional. No hem parlat de la persona que ha produït aquesta obra, però ho podríem haver fet ja que també era excepcional.

Esperem que aquest text serveixi d'índex per la gent que vulgui conèixer més a fons l'obra de Vicent Caselles.

Nota 1: No hem inclòs referències formals a les publicacions científiques; en canvi, hem escrit els noms i cognoms d'alguns col·laboradors en cada àrea de recerca. L'objectiu de referir explícitament aquests noms no és per reconeixement, sinó per facilitar les cerques dels articles. Per exemple, el lector interessat en els treballs sobre xarxes d'irrigació pot introduir els mots "Caselles Bernot" al cercador d'articles Google Scholar i obtindrà una llista dels articles més rellevants sobre aquest tema. Si volguéssim reconèixer explícitament tots els col·laboradors, hauríem d'escriure una llista de gairebé cent noms.

Nota 2: En aquest text s'ha parlat només d'algunes contribucions científiques de Vicent Caselles, no pas de totes. Això vol dir que han quedat molts treballs per explicar i molts col·laboradors per anomenar. Inevitablement, s'hi deuen haver omés els treballs preferits de molta gent, però la llista d'articles és tan llarga i tan variada que aquestes llacunes són fruit de la necessitat, no de l'oblit.

