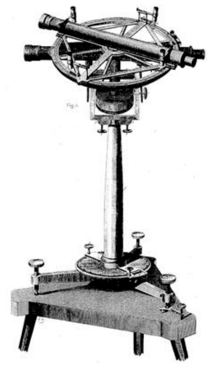
Tractament de les incorreccions en la mesura del meridià



Florencio Burrel
Professor de l'Escola de Matemàtiques de la Marina Alta

És difícil d'imaginar en l'actualitat la gran importància que tenia al segle XVIII i primeries del XIX l'Astronomia de Posició, sobretot, pel seu ús en la navegació marítima i en la confecció de mapes. Les matemàtiques jugaven un paper fonamental en aquestes tasques, conseqüència d'això fou l'espectacular avenç que tingueren. Tots els matemàtics d'aquesta època estigueren molt interessats en aquests temes, com ho demostren les seues publicacions múltiples i les discussions productives que sorgiren sobre això. Matemàtics de la talla de Descartes, Newton, Euler, els Bernoulli, Laplace, Lagrange, Gausss, etc., considerats entre els millors de tots els temps, deuen bona part de la seua producció a la cerca de solucions als problemes que es presentaren en allò que a hores d'ara anomenem Astronomia i Geodèsia.

Centrant-nos en el que s'estava fent a les primeries del segle XIX, ens fixarem en el gran problema de millorar les observacions i els càlculs. Aquestes eren activitats fonamentals en els treballs de mesurament geodèsics i astronòmics, ja que era absolutament necessari corregir tot el possible les dades arreplegades amb els instruments de què es disposava, per tal que, atesa la grandària de les quantitats manejades, es reduïren els errors comesos tant com fóra possible.

Durant tot el segle XVIII els matemàtics havien buscat i imaginat mètodes i tècniques que els portaren a resultats cada vegada més fiables. És aquesta una aventura poc coneguda, però apassionant: és meravellós contemplar aquests genis (així els anomenava la gent) aventurar-se per terrenys matemàtics desconeguts amb aqueixa alegria i atreviment que els donava saber que estaven entrant en un camp inexplorat de les matemàtiques . Els avenços matemàtics d'aquesta època cal buscar-los en publicacions que hui anomenaríem de Física o d'Enginyeria. Només per posar un exemple, Newton, tot buscant donar solució a les imprecisions dels aparells astronòmics, publica un compendi de novetats sobre Geometria i Òptica que serà fonamental per al futur d'aquestes disciplines.

I justament, molt poc després dels treballs de Biot i Aragó al Montgó, fa la seua aparició el primer tractat de probabilitat, escrit per Laplace. No hi ha dubte que, a més de probabilitat, és també un tractat d'estadística i recopilació de dades, atés que ell estava molt compromés en els mesuraments del meridià, que era l'aventura científica de l'època. També, uns anys més tard, el gran matemàtic alemany Gauss (anomenat el príncep de les matemàtiques) donà a conèixer els seus treballs de teoria d'errors. És a partir de les publicacions d'aquestes dues autoritats matemàtiques indiscutibles, que els geodesistes poden disposar d'una base teòrica per al tractament de dades que venien demanant els investigadors; entre ells, l'alacantí Jorge Juan, des de feia cent anys.

Tractament d'error d'observació. Mínims quadrats.

Les observacions efectuades amb els instruments de l'època resultaven sempre alterades per errors causats en la imperfecció dels aparells, a la manera d'utilitzar-los, al medi on s'efectuen les observacions, al lloc que ocupava l'observador... En aquesta època ja s'utilitzen fórmules i paràmetres de calibratge d'eixos, cercles graduats, calibres, etc.

Però els errors més analitzats eren els sistemàtics, que es presenten sempre que es realitza una observació en les mateixes circumstàncies. Per exemple, els que apareixen al mesurar amb una cinta mètrica a distintes temperatures poden calcular-se coneixent els coeficients de dilatació dels materials amb què està feta. Uns altres exemples són: el de la graduació dels cercles, l'excentricitat del sextant, el de l'índex vertical i horitzontal ...

En ocasions, els científics proposaven lleis matemàtiques que explicaven el fenomen estudiat, i comprovaven fins a quin punt estaven d'acord amb la realitat analitzada. Les diferències entre els valors observats i els deduïts de la llei matemàtica proposada havien de ser estudiats per decidir si es podia acceptar que aquesta teoria representava la realitat.

S'assistia així al naixement de la teoria d'errors, que culmina amb les publicacions de Gauss, *Theoria motus Coelestium* de 1809 i *Theoria combinationis erroribus minimis obnoxiae* de 1823, on s'estableix definitivament la "Teoria d'errors d'observació" i la seua aplicació pràctica, amb la deducció de la llei que els governa i que porta el seu nom. Aquesta teoria fou gestant-se a poc a poc a partir d'aportacions múltiples, que no eren més que recopilacions del que estaven fent molts investigadors en aquell moment (estem a l'època de la Il·lustració, quan molts científics donaven a conèixer les seues aportacions amb rapidesa i generositat gràcies a les Reials Acadèmies de Ciències de Londres, París i Berlín, especialment).

Biot i Aragó, que treballaven a París amb Legendre i a prop de Laplace, coneixien i aplicaven algunes distribucions de freqüències degudes a Simpson des de 1757, Legendre 1796, etc.; i eren molt influents en l'època els treballs que Laplace venia donant a conèixer des de 1797 que culminaren amb la *Theorie analytique de probabilité* el 1811, on introdueix la probabilitat d'una funció lineal d'errors i dóna fórmules per a les distribucions de freqüències.

Qualsevol mesurament, bé de distàncies o bé d'angles, era repetit un bon nombre de vegades, i s'efectuava sempre amb els mateixos mètodes i aparells, i amb la màxima atenció, encara que, en general, s'obtenien resultats diferents a cada observació. A partir d'aquestes dades calia decidir quin era el valor que proporcionava menys error al prendre'l com a mesura de dita magnitud, i l'aproximació que representava.

Des de temps enrere s'admet la mitjana aritmètica com a valor més probable, la qual cosa no vol dir que siga més exacte, ni que puga haver-hi cap valor entre els observats que s'aproxime més al valor vertader. Però, si les observacions s'han efectuat amb la major cura i precaució possibles, cal esperar que els errors siguen molt petits i que n'hi haja tants en un sentit com en l'altre. Potser, al prendre l'error mitjà es produesca una compensació entre els errors positius i negatius que done una idea falsa del conjunt.

Uns consideren com a millor representant d'aquestes errors la mitjana aritmètica dels seus valors absoluts, però uns altres consideren més adequat calcular l'arrel quadrada de la mitjana dels seus quadrats, anomenada desviació típica. Aquest valor s'utilitza per definir un interval al voltant (a) de la mitjana on es troba la magnitud buscada amb una determinada probabilitat.

Aquests conceptes comencen a utilitzar-se abans d'acabar el segle XVIII, però sense sospitar la gran potència que tenien entre les mans. El 1805, Lebesgue publica un treball on troba l'equació de la corba que millor s'ajusta a una sèrie de valors, i minimitza les diferències entre ells i els punts de la corba. D'aquesta manera plantejà una quantitat d'equacions major que d'incògnites, a partir de les quals obté els paràmetres de l'equació de la corba. Poc temps després, 1809, Gauss comenta en una publicació que ha usat una versió més completa d'aquest mètode el 1801, al calcular l'òrbita d'un asteroide, Ceres, que s'havia perdut després de permetre que es prengueren uns pocs punts, tot i que insuficients, de la seua trajectòria. Gauss en diverses publicacions va construint una teoria basada en els mateixos mètodes, però utilitza probabilitat i estadística. Després s'anomenaria teoria de mínims quadrats, que ell qualificaria com "la més important de l'aplicació de les matemàtiques a la *Filosofia natural*".

Ens trobem davant la connexió entre la teoria i l'experiència. És aquesta història un exemple clar de com la teoria ve a confirmar els resultats que l'experiència venia anticipant. Els científics estaven utilitzant uns postulats que els dictava el sentit comú a partir de les seues experiències, i sentien la necessitat d'un cos teòric que els confirmà les seues suposicions i els permeté, a partir del desenvolupament matemàtic de dites conclusions, arribar molt més lluny i més ràpidament en les seus hipòtesis. Aquesta falta de bagatge teòric feia que sempre hagueren de comprovar experimentalment les seus hipòtesis; la qual cosa explica bona part del temps que dedicaven a cada observació.

Però encara dedicaven més temps a les correccions causades pels instruments, o al lloc ocupat per l'observador, o als defectes d'observació, etc. A les memòries publicades de les seues investigacions, Biot i Aragó no sempre informen de les correccions que realitzen ni del tractament donat als errors comesos. En ocasions s'obté informació de les correccions dels esmentats tractaments a través de les justificacions que donen en defensa dels seus procediments. Inclús, en moltes ocasions, cal suposar que han fet correccions simplement per l'exactitud dels resultats obtinguts. Donem a continuació informació de correccions que afirmen haver usat, encara que no detallen els procediments emprats: La correcció per refracció atmosfèrica, correcció per depressió de l'horitzó i l'excés esfèric.

La correcció per refracció atmosfèrica

Se sol tenir present la desviació de la llum per refracció quan es fa ús dels astres per obtenir posicions a la Terra. Els raigs emesos per l'estrella, al penetrar l'atmosfera, sofreixen una desviació i arriben a l'ull de l'observador després d'haver-hi seguit una trajectòria corba, de manera que s'aprecia la posició de l'astre en la direcció de la tangent. Vegeu fig. 1, on els angles estan exagerats.

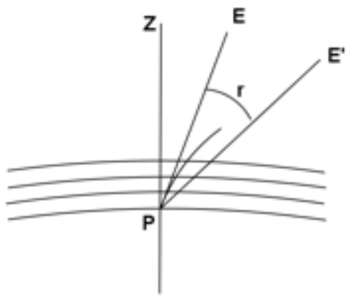


Fig. 1

Suposem l'observador al punt P, E la posició real de l'estrella i E' el lloc en què la veiem a causa de la refracció. El desenvolupament matemàtic per obtenir la correcció per refracció és molt complex, encara que està basat en les lleis de la refracció conegudes des de Kepler.

Es considera l'atmosfera composta de capes concèntriques de densitat creixent en direcció a la Terra. És acceptable considerar que, si el raig no incideix amb massa inclinació, les capes atmosfèriques són planes.

Comencen els càlculs de la 2a llei de la refracció que diu: els sinus de l'angle d'incidència i de refracció al passar d'un medi a un altre, són inversament proporcionals als índexs de refracció dels esmentats medis.

Després de substitucions i càlculs enfarfegadors, integrant per a tots els índexs, s'obté una fórmula de la correcció per refracció R:

$$R = \frac{l_0 - 1}{sen1''} \times \frac{P'}{P_0} \times \frac{1}{1+\alpha t} \tan z$$

On P' és la pressió a la capa més pròxima a la Terra, t la temperatura de l'aire, z és la distància zenital, l_0 l'índex de refracció a zero graus i pressió normal P_0 de 762 mm i α el coeficient de dilatació de l'aire.

Parem atenció sobre aquesta fórmula perquè Biot i Aragó, durant els seus treballs de medició, possiblement aquests que estem comentant, trobaren els següents valors de les constants:

$l_0 = 1'000294$ y $\alpha = 0'004$

que, atesa la seua exactitud, encara eren utilitzades pels geodesistes fa pocs anys (vegeu *Elementos de Astronomía de Posición, de Manuel Medina*, editat el 1974 per Ed. Limusa).

També Biot, conjuntament amb Bouguer, són recordats en el tractament clàssic per corregir la refracció quan es mesura l'alçada relativa als dos senyals dels extrems d'una "base fonamental". A la hipòtesi coneguda pel nombre de Bouguer-Biot es fan les suposicions següents de partida:

a) L'angle de refracció en un punt determinat d'un costat de la triangulació és proporcional a l'angle al centre de terra sustentat per l'esmentat costat (vegeu fig. 2).

b) Si aquest costat no és excepcionalment llarg, els angles de refracció r i r' poden considerar-se iguals.

c) Per tal que dits angles de refracció siguen mínims, i sobretot constants, cal efectuar la mesura del angles de l'alçada i depressió d i d', a les hores més càlides del dia.

A la figura 2, T és el centre de la Terra; A i B els senyals extrems de la base i els punts A' i B' són els punts on veiem cada senyal en observar-lo des de l'altre a causa de la refracció. Els angles i les distàncies estan exagerats a fi que es puguen distingir

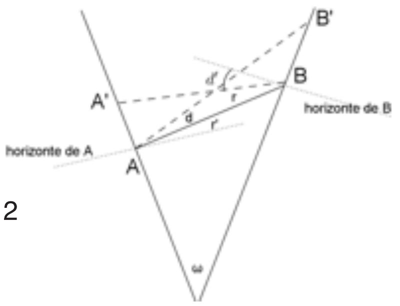


Fig. 2

Correcció per depressió de l'horitzó

Si observem sobre la mar, amb el sextant, l'alçada d'un cos celeste amb relació a l'horitzó, considerem que aquest és la línia circular que separa la mar del cel. Però aquesta línia sol estar més baixa que l'horitzó de l'aparell que estem utilitzant, anomenat horitzó racional, que és el que marca el nivell de bombolla col•locat a l'aparell. En el cas del Montgó, l'horitzó de la mar està clarament molt per davall de l'horitzó de l'aparell.

Suposem que estem situats al punt P, fig. 3, en una alçada h sobre el nivell de la mar i que H i H' són l'horitzó racional i el visible. L'angle PTH' format al centre de la terra és igual a l'angle de depressió d que volem determinar.

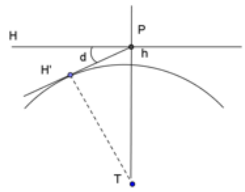


Fig. 3

Al triangle rectangle PTH' tenim:

$$\tan = \frac{PH'}{R} = \frac{\sqrt{(R+h)^2 - R^2}}{R} = \frac{\sqrt{2hR + h^2}}{R}$$

On R és el radi de la Terra. Atesa la grandària petita de h respecte a R, podem refusar h^2, amb la qual cosa la fórmula queda:

$$\tan d = \sqrt{\frac{2}{R}} \cdot \sqrt{h}$$

Que ens servirà per calcular l'angle de depressió d.

Excés esfèric

S'anomena excés esfèric d'un triangle esfèric, el valor en què la suma dels seus tres angles excedeix de dos rectes,

$$\varepsilon = A + B + C - 180^\circ$$

Davant el triangle ABC, limitat per tres cercles màxims, fig. 4. Si suposem que el costat AB coincideix amb el pla de la figura, cada vèrtex del triangle, produeix a l'esfera un sector o fus de superfície coneguda.

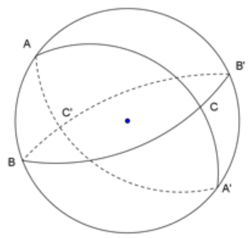


Fig. 4

En efecte, tot considerant l'àrea de l'esfera S = $4\pi R^2$, la del sector d'angle A serà:

$$\frac{4\pi R^2 A}{360}$$

Per una altra part, sumant les àrees dels tres sector d'angles A, B, C resulta mitja superfície esfèrica i dues vegades el triangle ABC, la superfície del qual denominem T, és a dir

$$\frac{4\pi R^2 A}{360} + \frac{4\pi R^2 B}{360} + \frac{4\pi R^2 C}{360} = \frac{1}{2} \cdot 4\pi R^2 + 2T$$

Dividint per $4\pi R^2$ i multiplicant per 360, tenim

$$A + B + C = 180 + 360 \frac{2T}{4\pi R^2}$$

i d'aquí $\varepsilon = A + B + C - 180 = 360 \frac{2T}{4\pi R^2}$

En radiants serà $\varepsilon = \frac{2T}{R^2}$

Aquest valor és utilitzat en el cas de triangles esfèrics i també de triangles el•lipsòidics, els costats dels quals seran petits davant el radi de l'esfera.

Legendre demostrà que l'excés esfèric era poc rellevant als angles petits, amb la qual cosa Biot i Aragó solament ho tingueren en compte als triangles excepcionalment grans.