Matemàtiques que s'usaven per a la mesura del meridià: Triangulació

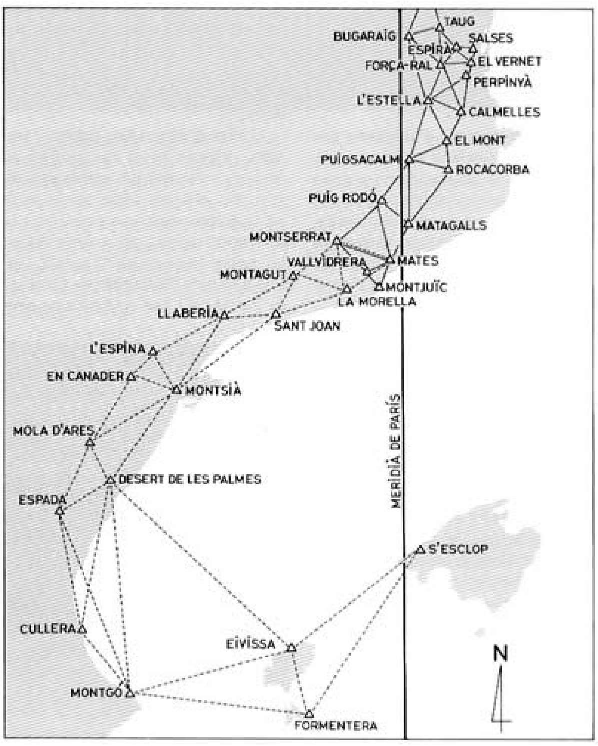
Florencio Burrel
Professor de l'Escola de Matemàtiques de la Marina

La tasca de mesura d'un arc de meridià a les primeries del segle XIX era un veritable treball d'investigació, ja que hi havia molt poques zones cartografiades i els ferraments eren imprecisos. El bagatge matemàtic de què disposaven era molt escàs, i el tractament que es donava a les dades consistia en procediments poc contrastats, copiats d'altres o inventats pel propi científic. Justament molts pocs anys després aparegué el primer tractat de probabilitat i estadística escrit per Laplace i, també en aquell temps, Gauss donà a conéixer la seua teoria d'errors. No hi ha cap dubte que els treballs d'aquests dos grans matemàtics permeteren construir un suport teòric a allò que estaven fent els seus col·legues.

Abordem a continuació alguns dels aspectes matemàtics utilitzats en el procés de mesura de l'arc de meridià realitzat per J. B. Biot i i F. Aragó seguint la part final de la triangulació que apareix a la figura.

La triangulació

La triangulació geodèsica és un procediment per mesurar distàncies sobre la superfície terrestre. El mètode usat en l'època que ens ocupa fou introduït per l'holandés Willebrord Snell el 1617. En essència, consisteix a fixar la latitud dels extrems de l'arc a mesurar, tot unint-los al llarg d'aquest mitjançant una sèrie de triangles encadenats on cada dos triangles adjacents comparteixen un dels seus costats. Com a vèrtex d'aquests triangles, o estacions, s'escullen punts elevats a fi de poder estendre visuals des de cadascun d'ells als vèrtex pròxims.



Un punt qualsevol pot fixar-se des d'un altre conegut per la distància entre ambdós i per l'azimut (angle que forma amb el pla del meridià del lloc) de la línia que els uneix. Si el punt que es tracta de fixar és visible des de l'altre conegut, pot llegir-se la seua direcció amb molts pocs minuts d'error amb el sextant. En canvi, per mesurar la distancia directament amb una gran precisió es tardaven diverses setmanes i es requeria molt de personal, cosa que no garantia una precisió acceptable. Per aquesta causa, un geodesista preferia llegir dotzenes d'angles abans que mesurar directament una sola distància.

Així doncs, amb el sextant s'obtenen els angles de cada triangle. A continuació, es mesura acuradament sobre el terreny, amb regles, l'anomenada "base fonamental", que constitueix el costat d'un dels triangles. Coneguda aquesta, des dels seus extrems A i B (fig. 1) es prenen les direccions d'altres punts llunyans, com C i D, situats, en alguns casos, a molts quilòmetres de distància, i així va construint-se la xarxa. En principi els triangles d'aquesta xarxa són esfèrics (situats sobre l'esfera), amb els costats formats per cercles màxims (meridians), però en la majoria dels casos poden considerar-se plans sense perdre precisió.

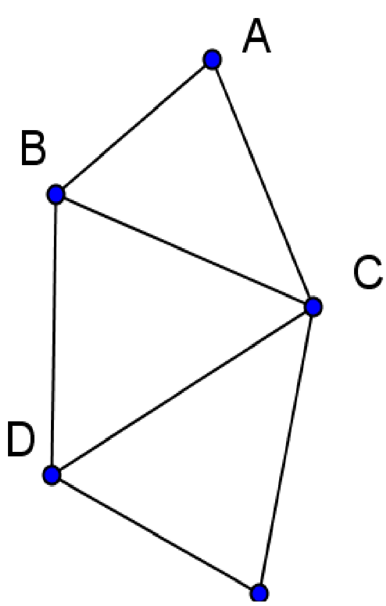


Fig. 1

En el cas que ens ocupa, no calgué mesurar una base al poder utilitzar la xarxa de triangles que havia establert P. Méchain. Alguns dels triangles que utilitzaren eren molt grans, amb la qual cosa, per optimitzar la precisió, al no poder situar vèrtexs enmig de la mar, suposem que feren els càlculs utilitzant tant trigonometria plana, com esfèrica.

Triangulació plana

Recorde com de meravellat em quedí quan descobrí que podia conéixer tots els costats d'un triangle si em donaven un costat i els angles adjacents (vaja paraula, que es refereix als angles que estan als dos vèrtexs que comparteixen aquest costat). I no diguem quan, utilitzant el mateix concepte, podia mesurar l'amplada d'un riu sense passar a l'altre costat.

Això és el que porten fent els astrònoms des de, diguem, temps remots: aplicar la geometria a la mesura de distàncies referides a llocs als quals no poden accedir. Ara ens semblen molt elementals les propietats entre els triangles semblants, però fou un gran descobriment per a la humanitat el seu ús en activitats diferents de la construcció.

Si considerem que la superfície de la Terra és plana, cosa que es fa quan prenem superfícies petites, el procés és bastant senzill: una vegada mesurats els angles (en realitat en mesurem dos i calculem el tercer restant-los de 180º) i un costat, podem conéixer les longituds dels altres angles de la manera següent:

Al primer triangle ABC (fig. 1), coneixem el costat AB i els tres angles A, B i C. Amb aquestes dades és possible dibuixar al nostre quadern un triangle semblant A'B'C', a partir d'un segment A'B' la longitud del qual hem triat nosaltres i amb angles iguals a l'original. Per les propietats de semblança de triangles podem conéixer els altres dos costats per ser proporcionals als seus homòlegs.

Per exemple, suposem que el costat AB hagués mesurat 160 m i que el segment A'B' l'haguéssem dibuixat al nostre quadern de 10 cm de longitud, al mesurar els altres dos costats trobem que A'C' = 14 cm i B'C' = 11 cm.

Al ser els dos triangles semblants, els seus costats homòlegs són proporcionals i compleixen les condicions:

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}$$

Quan separem en dues igualtats i substituïm les dades conegudes, tenim:

$$\frac{160}{10}=\frac{AC}{14} \qquad \text{i} \qquad \frac{160}{10}=\frac{BC}{11}$$

Deixant AC a la primera igualtat i BC a la segona, tenim els costats que busquem:

AC=224 cm i BC=176 cm

Com es pot suposar, aquest càlculs són molt aproximats, principalment pels errors que es cometen al dibuixar el triangle i al mesurar la longitud dels seus costats.

Aquests errors es poden corregir utilitzant trigonometria plana mitjançant el teorema del sinus que, aplicat al triangle ABC, ens dóna les igualtats:

$$AC=AB\cdot\frac{\text{sen } B}{\text{sen } C} \qquad \text{i} \qquad BC=AB\cdot\frac{\text{sen } A}{\text{sen } C}$$

Com coneixem el costat AB, per obtenir els altres dos costats seran:

$$\frac{AB}{\text{sen } C}=\frac{AC}{\text{sen } B} \qquad \text{i} \qquad \frac{AB}{\text{sen } C}=\frac{BC}{\text{sen } A}$$

Que ens permet conéixer les seues longituds mitjançant càlculs sense fer mesuraments.

Triangles esfèrics

En la triangulació que ens ocupa, alguns dels triangles són excepcionalment grans amb la qual cosa es considerà de fer els càlculs mitjançant trigonometria esfèrica.

En un triangle esfèric els costats i els angles es mesuren en graus, minuts i segons, encara que, si es coneix el radi de l'esfera, poden calcular-se els costats en unitats de longitud.

Una vegada mesurats tots els angles i conegut un dels costats, es poden calcular els que resten mitjançant les fórmules fonamentals de trigonometria esfèrica:

cos a = cos b cos c + sen b sen c cos A (1)

i la que es dedueix d'ella

$$\frac{\text{sen } A}{\text{sen } a}=\frac{\text{sen } B}{\text{sen } b}=\frac{\text{sen } C}{\text{sen } c}$$

que correspondria a la fórmula del cosinus i a la dels sinus en trigonometria plana. Encara que a, b, i c són els costats del triangle, es poden calcular els seus sinus ja que són arcs mesurables en graus o en radians.

En astronomia, al manejar grans distàncies calia treballar amb quantitats molt grans que feien els càlculs molt farragosos. Per aquest motiu s'utilitzaven logaritmes que converteixen les multiplicacions en sumes, les divisions en restes i les potències en productes. Mitjançant càlculs algebraics complicats es pot convertir la primera fórmula (1) en una altra equivalent que no continga sumes ni restes a fi de poder aplicar logaritmes (vegeu més endavant dita fórmula (2)). No ens detindrem en els mètodes utilitzats per manca d'interés actual gràcies a les calculadores.

D'una manera o d'una altra, s'obtenen les longituds dels altres dos costats del triangle ABC i, a partir d'ells es continuen calculant els costats de la resta de triangles.

Així va avançant-se pels senyals, molt a poc a poc, comprovant tots els resultats de totes les maneres possibles. Per exemple, es pot apreciar al gràfic de la triangulació de Biot i Aragó, que alguns dels triangles no són necessaris per calcular totes les dades i resultats amb els triangles veïns. També es feia una mesura d'una segona base fonamental, normalment al final de la triangulació, per comprovar la longitud d'un costat, comparant els resultats del càlcul amb els de les mesures.

Una altra operació necessària consistia a calcular la projecció dels segments sobre l'horitzó del més baix, ja que, en estar els senyals a diferents altures, els segments tenen inclinació distinta, amb la qual cosa s'han de reduir a l'altura de l'horitzó.

Inclinació dels costats respecte del meridià

La longitud del meridià que ens ocupa serà la suma de les distàncies entre els paral·lels que passen pels vèrtexs de la triangulació presos dos a dos. Per això necessitarem conéixer en primer lloc la inclinació dels costats dels esmentats triangles respecte al meridià. Suposem que desitgem trobar la inclinació respecte del meridià que passa per P del costat situat entre dos vèrtexs, P i Q, d'un dels triangles que hem calculat. A la (fig. 2) es representa l'esfera celeste prenent com a centre els vèrtex Q. La inclinació que cerquem és l'angle que forma el costat QP amb el meridià de P, és el mateix que el que forma l'esmentat meridià amb la projecció de l'arc QP sobre l'horitzó de Q, és a dir, HQP'.

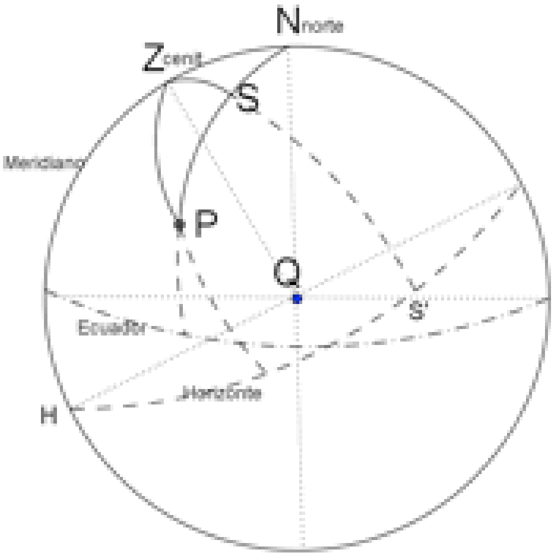


Fig. 2

Des de Q es mesura la distància angular PS existent entre la posició del vèrtex P a l'esfera celeste i el punt S, corresponent a la posició del Sol en una hora obtinguda amb el rellotge de pèndol. En aquest moment es mesura a més l'arc ZS, complementari de l'altura del Sol sobre l'horitzó. I també des de Q hem mesurat l'arc PZ entre el vèrtex P i el zenit Z.

Ara podem calcular l'angle PZS mitjançant la fórmula fonamental preparada per poder aplicar logaritmes.

$$sen\,\frac{PZS}{2} = \sqrt{\frac{sen\,(p - PZ)\cdot sen\,(p - ZS)}{sen\,PZ \cdot sen\,ZS}} \quad (2)$$

sent p $$p = \frac{(PZ + PS + ZS)}{2}$$

De la mateixa manera s'aplica la fórmula al triangle ZNS, on hem mesurat ja els seus tres costats, amb la qual cosa obtindrem el valor de l'angle SZN. Sumant ambdós angles, el PZS i el SZN, s'obté l'angle entre els dos senyals, el suplementari del qual és la inclinació del costat PQ respecte al meridià que passa per P.

Calculades les inclinacions dels costats de la sèrie de triangles respecte del meridià, calcularem les distàncies entre els paral·lels dels senyals aplicant el següent mètode a cada dos senyals: Considerarem que si CD és el meridià que passa pel senyal C (fig. 3) i AB el que passa per A, ABCD podem considerar-lo un rectangle i ADC és un triangle rectangle. Aleshores, la distància entre els paral·lels que passen per C i per A és un catet del triangle ADC, on l'angle ADC és el d'inclinació ja conegut i la hipotenusa és la distància horitzontal entre els senyals, ambdós coneguts.

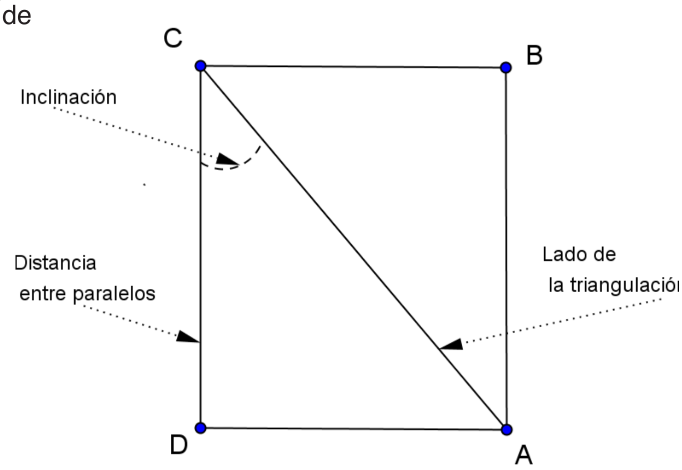


Fig. 3

Per tant:

CD (Distància entre paral·lels) = AC (distància entre senyals).cos ACD (angle d'inclinació)

Hem suposat que el triangle és pla, la qual cosa és acceptable atesa la diferència tan petita que s'obté respecte a considerar-lo esfèric.

Per què dedicaren tants anys?

Als informes que publicaven de les seues observacions, els científics no donaven notícies de molts dels càlculs matemàtics que feien amb les dades ni tampoc de les correccions que aplicaven sobre ells. Els càlculs eren veritablement complexos. Per començar, deixem el pla i entrem a l'esfera, amb una geometria diferent que origina fórmules noves molt més complicades, que encara es compliquen més en haver de convertir dites fórmules per poder aplicar logaritmes.

A més, atesa la importància científica i política de les mesures, era fonamental la cerca de l'exactitud màxima. Això portava afegit obtenir el major nombre possible de dades, de totes les maneres possibles en aquell moment, i tractar-les de manera que s'eliminaren els errors tant com fóra possible així com donar informació quantificada del grau d'exactitud aconseguit.