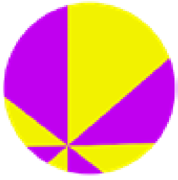
El racó de Fibonacci

Vicent R. Chorro

Teorema de la pizza



Si una pizza circular es divideix en 8 trossos fent talls d'angles iguals des d'un punt qualsevol de la pizza, la suma de les àrees dels trossos alterns coincideixen.

Solució del problema de DAUALDEU 21

La fórmula d'Heró diu que l'àrea del triangle és $A_t = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ on $p = \dfrac{a+b+c}{2}$

i hem de demostrar-la a partir de la fórmula $A = \dfrac{c \cdot h}{2}$

Existeixen diverses demostracions. La que va donar el mateix Heró quan publicà *Mètrica* a mitjans del primer segle de la nostra era, fent servir exclusivament, resultats geomètrics i, especialment, aspectes de semblança de triangles. Una segona demostració, pot ser la més coneguda, utilitza el teorema del cosinus que relaciona l'angle amb els tres costats. Vaig a exposar, tanmateix, la demostració que apareix en la publicació de **Manuel de León** i **Agata Timón** *La engañosa sencillez de los triangulos*, en la qual només fan ús de conceptes aritmètics i del teorema de **Pitàgores**.

Hem assenyalat en el gràfic l'altura del triangle que divideix la base en dos costats, si el costat de l'esquerra li diem d, al segment de la dreta serà $c-d$ i fent servir Pitàgores

$h^2 = b^2 - d^2$ i $a^2 = h^2 + (c-d)^2$

$$A = \frac{c \cdot h}{2} \rightarrow 2A = c \cdot h \rightarrow 4A^2 = c^2 \cdot h^2 = c^2b^2 - c^2d^2 = (cb)^2 - (cd)^2 \quad (1)$$

Si agafem la fórmula d'Heró: $A^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$

I anomenem $r = p(p-a)$ i $s = (p-b)(p-c)$ obtenim substituint

$4A^2 = 4p(p-a)(p-b)(p-c) = 4r \cdot s$ i un resultat d'igualtats notables diu que

$4rs = (r+s)^2 - (r-s)^2$ (2)

Si comparem les fórmules (1) i (2) l'únic que hauríem de demostrar és que:

$r - s = cd$ i $r - s = cd$

$r + s = p(p-a) + (p-b)(p-c) = 2p^2 - p(a+b+c) + bc = bc$, ja que $a+b+c = 2p$

$r - s = p(p-a) - (p-b)(p-c) = p^2 - pa - p^2 + pc + pb - bc =$

$$= p(b+c-a) - bc = \frac{a+b+c}{2}(b+c-a) - bc = \frac{b^2+c^2-a^2}{2} =$$

$$= \frac{h^2+d^2+c^2-h^2-c^2+2cd-d^2}{2} = cd$$

Ja que $b^2 = h^2 + d^2$ i $a^2 = h^2 + (c-d)^2 = h^2 + c^2 - 2cd + d^2$