El problema de **la pila de llibres** o de la torre inclinada de Lira

María Luisa Pedro
Professora de Matemàtiques

Suposem que disposem de llibres iguals del mateix pes i volem apilar-los a la vora d'una taula. Si movem cada llibre un poc cap a fora de la taula respecte al llibre inferior, a quina distància màxima podríem separar el llibre superior de la pila de la taula?

Aquest problema va ser publicat pel famós divulgador científic **Martin Gardner** l'any 1964 en la revista *Scientific American*.

Abans de començar amb la resolució del problema, repassem algunes nocions bàsiques de física. El Centre de Gravetat (CDG) d'un cos és el punt on està aplicat el seu pes. Si tots els punts del cos estan sotmesos a la mateixa gravetat, com serà el cas del nostre cos (el llibre), el CDG coincideix amb el Centre de Masses (CM). A més, si el cos té densitat uniforme, com també és el nostre cas, el CDG, el CM i el Centre Geomètric coincideixen.

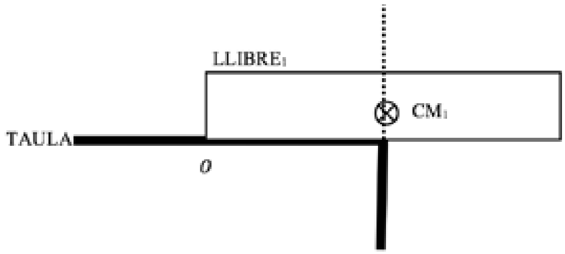
Per tal que un cos recolzat sobre una superfície no gire (bolque) la vertical que passa pel CM, ha de passar per la superfície de recolzament. Per exemple, quan nosaltres estem plantats amb els peus junts la vertical que passa pel nostre CM sempre cau entre els nostres peus i estem en equilibri, però si sense separar els nostres peus ens inclinem massa cap avant, cap arrere o cap al costat perdrem l'equilibri, ja que la vertical no caurà entre els nostres peus.

POSICIÓ ESTABLE

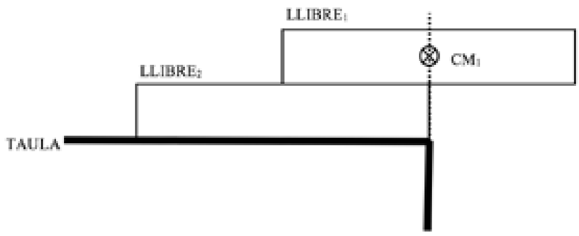
POSICIÓ INESTABLE

Qualsevol cos extens pot considerar-se com una partícula on la seua massa es trobe en el CM. Per a simplificar, cada llibre serà considerat com una partícula on el pes de la qual es trobarà situat al CM, en el nostre cas, en el centre del llibre. El CM el representarem amb el següent símbol ⊗ i la vertical amb una línia discontínua de punts.

Una vegada revisades aquestes nocions passem a la resolució del problema. Considerem un llibre de longitud L. Quan posem el llibre a la vora d'una taula, aquest no caurà si la vertical que passa pel seu CM es troba sobre la taula, així doncs, com a màxim podem fer que el llibre sobreïsca una distància 1/2 L de la vora de la taula.



Considerem ara dos llibres idèntics de longitud L. Suposem que el llibre inferior es troba sobre la taula coincidint el seu extrem dret amb la vora de la taula. El llibre superior podrà estar en una situació similar a l'anterior, és a dir, sobreeixint 1/2 L de la vora de la taula. Cal calcular fins a quina distància podríem separar el llibre inferior de la taula sense que bolquen.



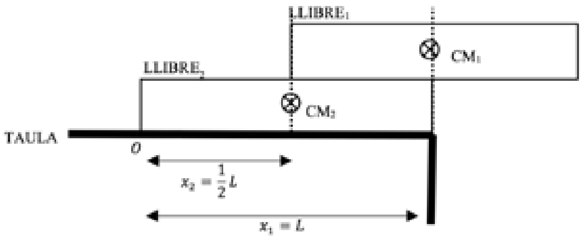
Per això, hem de trobar el CM del conjunt dels dos llibres. La coordenada x del CM d'un conjunt de n partícules respecte a un origen de coordenades O ve donada per

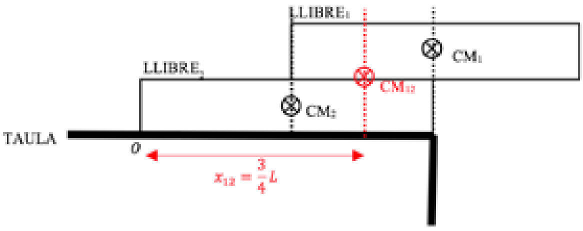
$$x_{CM_{1\ldots n}} = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + \ldots + x_n m_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}$$

on m_i és la massa de la partícula i i x_i la distància del CM de la partícula a l'origen de coordenades O.

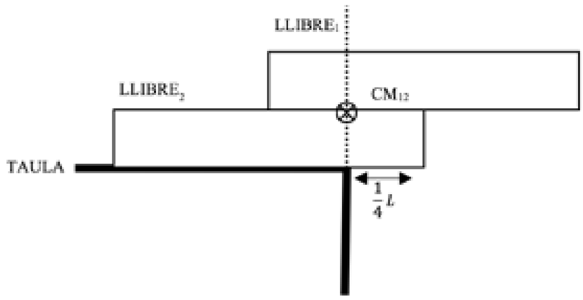
Si agafem l'origen de coordenades en l'extrem esquerre del llibre inferior tenim

$$x_{CM_{12}} = \frac{Lm + \frac{1}{2}Lm}{m+m} = \frac{L}{4} + \frac{L}{2} = \frac{3}{4}L$$





El CM dels dos llibres està a $x_{12} = 3/4\ L$ de l'extrem esquerre del llibre inferior. Per tant, si posem la vertical que passa per aquest CM a la vora de la taula, el conjunt no caurà i el llibre inferior sobreeixirà 1/4 L de la taula.

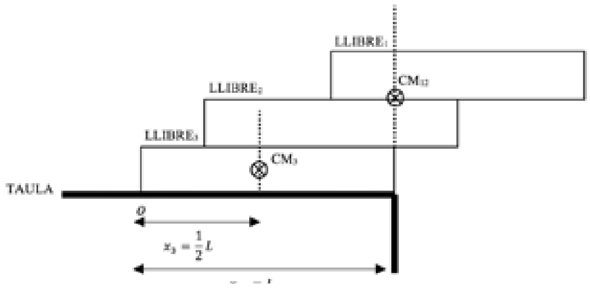


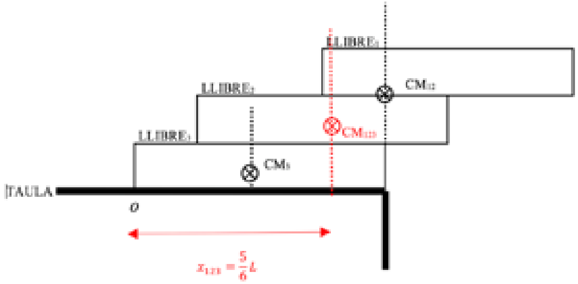
Així, el conjunt dels dos llibres sobreïx un total

$$\frac{1}{4}L + \frac{1}{2}L = \frac{3}{4}L$$

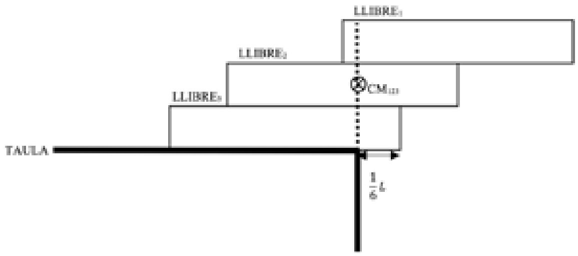
Repetim el mateix procés afegint un tercer llibre on l'extrem dret del qual coincideix amb la vora de la taula. Per a simplificar els càlculs considerarem els dos primers llibres com a un únic cos amb el seu CM on acabem de calcular i de massa $2m$. El CM dels tres llibres vindrà donat per

$$x_{CM_{123}} = \frac{L2m + \frac{1}{2}Lm}{2m+m} = \frac{2}{3}L + \frac{1}{6}L = \frac{5}{6}L$$





De manera que el llibre inferior pot sobreeixir 1/6 L de la taula, ja que la vertical que passa pel CM del conjunt caurà sobre la vora de la taula.

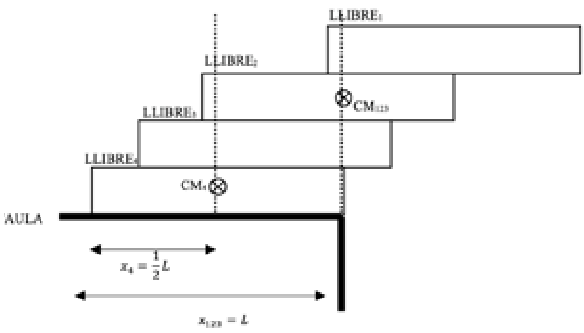


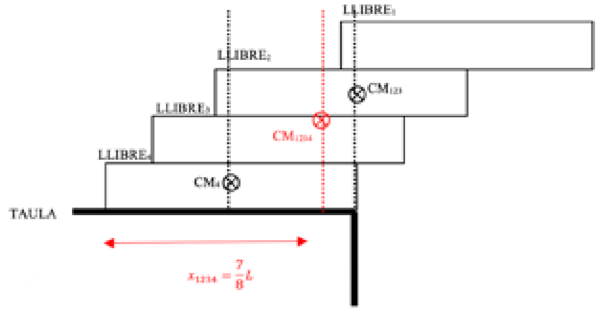
Així que els tres llibres sobreïxen un total

$$\frac{1}{6}L + \frac{1}{4}L + \frac{1}{2}L = \frac{22}{24}L < L$$

Tornem a fer el mateix raonament afegint un quart llibre. Considerarem els tres llibres de dalt com a un únic cos de massa $3m$ on la vertical del CM dels tres llibres ha de descansar sobre l'extrem dret del llibre inferior. Així tenim que

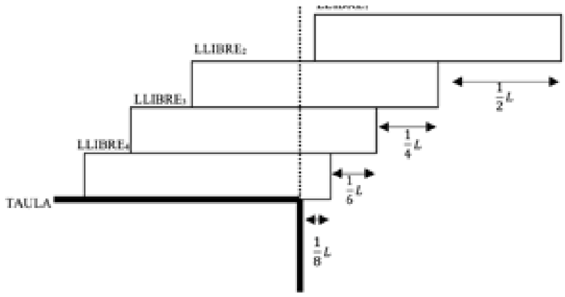
$$x_{CM_{1234}} = \frac{L3m + \frac{1}{2}Lm}{3m+m} = \frac{3}{4}L + \frac{1}{8}L = \frac{7}{8}L$$





De tal manera que el llibre inferior pot sobreeixir 1/8 L de la taula. Amb la qual cosa el conjunt sobreïx una longitud superior a la longitud d'un llibre

$$\frac{1}{8}L + \frac{1}{6}L + \frac{1}{4}L + \frac{1}{2}L = \frac{25}{24}L > L$$



Continuant amb el procés es pot comprovar que es necessiten apilar 31 llibres per tal que la distància que sobreïsca la pila siga major que dos llibres; farien falta 227 perquè fóra major que tres llibres; i per a separar el llibre superior 5 llibres de la taula es necessiten 12367 llibres. Però, fins a quants llibres podem separar realment el llibre superior de la torre de la taula?

Si continuàrem amb els càlculs per a n llibres, el conjunt dels llibres sobreeixiria la longitud següent:

$$\frac{1}{2N} + \ldots + \frac{1}{8}L + \frac{1}{6}L + \frac{1}{4}L + \frac{1}{2}L = \frac{1}{2}L\left(\frac{1}{N} + \ldots + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1\right)$$

Obtenim la següent sèrie

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{N}$$

què és divergent, és a dir, la seua suma tendeix a infinit. Així, hem demostrat que podem posar tants llibres com vulguem i fer que aquests sobreïsquen la distància que desitgem de la taula, una altra cosa seria dur-ho a terme en la pràctica.