Nombres grans, enormes, gegants... i més enllà

Miguel Angel Sanchis Lozano
Departament de Física Teòrica i Institut de Física Corpuscular CSIC-UV
Roger Sanchis Gual
Institute for Robotics and Intelligent Systems, ETH - Zurich (Suïssa)

Caminant per la platja, a la vora de la mar, qui no s'ha demanat alguna vegada quants grans de sorra hi ha en total al planeta Terra? Moltíssims, sens dubte. Hom ha estimat que n'hi ha de l'ordre de 10^19 grans (10 elevat 19), incloent-hi totes les platges i deserts.

Vertaderament és una quantitat enorme si la comparem, per exemple, amb el nombre d'estrelles de la nostra galàxia, la Via Làctia, on es calcula que n'hi ha de l'ordre de 10^11. Observem de passada que un cervell humà mitjà conté un nombre semblant de neurones.

Ara bé, l'univers s'estén molt més enllà de la nostra galàxia i no tot resulta, doncs, observable. Per una banda, la velocitat de la llum representa un límit per a la propagació de qualsevol senyal entre dos punts de l'espai, llavors limitant l'accés a regions molt allunyades de nosaltres. Per l'altra, el ritme d'expansió de l'univers desprès del *Big Bang* (prou diferent al llarg de la seua historia còsmica) també condiciona la distància màxima per a rebre senyals. Com a conseqüència, l'actual radi de l'anomenat univers observable es d'uns 46500 milions d'anys-llum. Un any llum es correspon amb la distància recorreguda per la llum en un any al buit, uns 10^13 km. Notem que la Via Làctia mesura uns 100 000 anys-llum de diàmetre i 2000 de grossària.

> **L'actual radi de l' anomenat univers observable es d'uns 46500 milions d'anys-llum.**

Al cap i a la fi, siga o no siga infinit, només una part de l'univers resulta observable des de la Terra. Cal dir que l'astronomia actual es basa en la detecció d'ones electromagnètiques (incloent-hi la llum, infraroig i ultravioleta, ràdio, raigs X y gamma, etc.), neutrins i ones gravitatòries que permeten l'accés a èpoques molt pretèrites, l'univers primitiu. Dins d'aquest volum observable al nostre voltant, hom calcula que hi ha aproximadament 10^12 galàxies; i com que cada galàxia conté de mitjana 10^11 estrelles, se n'obté un nombre total d'estrelles observables del mateix ordre del nombre d'**Avogadro** (≈10^23). A més a més, mitjançant observacions espectroscòpiques i models teòrics de l'evolució còsmica, s'ha estimat que el nombre total d'àtoms dins del nostre univers observable es de l'ordre de 10^80.

D'altra banda, segons les darreres observacions astrofísiques del corriment al roig cosmològic, l'univers es troba actualment en un estat d'expansió accelerada atribuït a l'anomenada energia fosca, d'origen encara desconegut, que genera una força repulsiva (antigravetat). Aleshores, la part de l'univers ara a l'abast de l'observació minvarà amb el transcurs de milions i milions d'anys, i decreixerà, per tant, el nombre de galàxies i d'àtoms detectables.

Nombres enormes

A més d'això, l'any 1920, el nebot del matemàtic **Edward Kasner** (1878-1955), va proposar un nom, el *googol*, per a un número molt gran: un 1 seguit de 100 zeros, és a dir, 1 googol=10^{100} superior al nombre d'àtoms estimat a l'univers observable, com hem comentat més amunt. La definició d'aquest número és arbitrària i no juga cap paper significatiu en matemàtiques. En canvi, va inspirar el nom de l'empresa Google, possiblement motivat per les nombroses connexions que en permet.

Posteriorment, Kasner va donar un pas més endavant, definint el *googolplex* com un 10 elevat a un googol, és a dir, googolplex= 10^googol.= 10^10^100.

Per si encara vos sembla menut, es defineix el googolduplex com a 10 elevat a un googolplex, és a dir, Googolduplex =10^10^gogolplex =10^10^10^100.

Com hem dit, aquestes xifres tan enormes no procedeixen de definicions formals derivades d'algun teorema o necessitat de càlcul; per tant manquen d'una motivació real. No obstant això, cal dir que números tan grans com el googolplex, o més, apareixen en demostracions matemàtiques, com ara en la teoria de números primers (número de **Skewers**), o encara més gegant, com l'anomenat número de **Graham**, que necessita una notació especial per a poder ésser representat.

No tots els infinits són iguals

Fins ara hem parlat de nombres molt grans, enormes, fins i tot inabastables per a la ment humana. No obstant això, ens adonem que a un nombre qualsevol, per gegant que siga, sempre és possible afegir-li'n un... De fet, qualsevol número finit empal·lideix davant l'anomenat *infinit*: un concepte que queda definit per "caminar per casa" com allò sense límits o fi.

Un dels primers grans pensadors a adreçar la qüestió de l'existència o no de l'infinit va ser **Aristòtil** (384 aC, 322 aC), fa més de dos mil·lennis, qui pensava que no podia existir més que potencialment, però mai de manera completa o realitzada. Molts altres pensadors han adoptat la mateixa idea, com el mateix **Johann Carl Friedrich Gauss** (1777-1855): l'infinit només té sentit com a un límit, i no mai com a una quantitat numèrica real.

El símbol de l'infinit (semblant a un huit gitat) va ser introduït en les matemàtiques per **John Wallis** (1616-1703) el segle XVII. Però va ser **Georg Cantor** (1845-1918) el primer matemàtic que va plantejar la qüestió de l'infinit dins d'una nova perspectiva (la teoria de conjunts)**,** iniciant una revolució en les matemàtiques i en el pensament filosòfic que encara perdura.

Utilitzant una teoria de conjunts (posteriorment desenvolupada i perfeccionada per altres matemàtics i lògics), Cantor distingí entre conjunts finits i infinits, segons el seu "cardinal" o nombre d'elements. Per exemple, el cardinal del conjunt dels dits d'una mà humana es cinc. De particular interés son els conjunts formats per infinits elements, i als quals també es pot associar un cardinal (anomenat transfinit), com va fer Cantor amb una gran valentia intel·lectual.

Així, Cantor anomenà alef0 (*alef* és la primera lletra de l'alfabet hebreu) al cardinal del conjunt de tots els nombres naturals. I es que, sorprenentment, no tots els conjunts infinits posseeixen la mateixa "grandària, fins i tot essent infinits". Anem a explicar això.

D'entrada, per comparar conjunts (finits) hi ha un mètode ben conegut (de sempre) com és emparellar un a un els llurs elements, com per exemple, cadires i persones dins d'un local. De fet, comptar no es més que aplicar aquest procediment entre el conjunt de nombres naturals i el conjunt a mesurar.

Galileu (1564-1642) va estendre aquest mètode als conjunts amb infinit elements, com es el cas dels nombres naturals i els seus quadrats, que poden emparellar-se un a un. Es tracta de trobar una correspondència (biunívoca) entre els naturals (triat com a conjunt de referència) i el conjunt infinit del qual volem "comptar" els seus elements. Pensem en el conjunt R dels nombres reals. Cantor va demostrar que, segons el mètode de comptatge esmentat, hi ha *més nombres reals que de naturals*, essent ambdós infinits! Es designa alf1 el cardinal següent a alf0, que es correspon (sota la hipòtesi del continu, no entrarem en detalls aquí) amb el conjunt dels nombres reals.

Abans de continuar, remarquem que els conjunts dels nombres parells (o senars), racionals o enters, tenen associat el mateix cardinal: alef0. Aleshores cal abandonar el principi aristotèlic, tan aparentment intuïtiu, segons el qual el tot es major que les seues parts.

Una cosa semblant ocorre amb el conjunt de nombres reals: els nombres reals d'un interval finit (per exemple, entre 0 i 1) es pot posar en correspondència biunívoca amb els de tota la recta real. Ambdós amb el mateix cardinal alef1.

A més a més, Cantor va demostrar que la cardinalitat (aleph1) de la recta real R (es a dir, dels nombres reals) i el pla real R^2 (es a dir, de tots els parells de nombres reals) es la mateixa. Quan **Richard Dedekind** (1831-1926), el seu amic i també gran matemàtic, va rebre la demostració de Cantor va exclamar: "Ho veig, però no ho crec".

Però la historia no acaba ací. Més enllà dels nombres reals, es possible establir una jerarquia de conjunts infinits segons la seua grandària, es a dir, el seu cardinal transfinit associat, que reben els noms d'alef2, alef3, i així successivament. Per exemple, alef2 representa el cardinal del conjunt de tots els subintervals de la recta real. Aquest-conjunt infinit té més elements que no els reals i, per descomptat, que no els naturals o enters.

Les aparents paradoxes contraintuïtives dels cardinals transfinits varen fer dubtar durant deu anys el seu creador, Cantor, fins acceptar la seua consistència. En l'article on introduïa aquests conceptes, el 1883, per poc que no demanava disculpes i s'autojustificava perquè no hi havia més remei. Iniciava aleshores un període turbulent en la seua vida, amb períodes de depressió, que probablement tenien una malaltia mental maníaco-depressiva subjaent.

Cantor no ho tingué gens fàcil, en part perquè el seu anterior mentor, el matemàtic **Leopold Kronecker** (1823-1891), va rebutjar amb inèdita duresa, la teoria dels nombres transfinits, fins i tot acusant-lo de xarraire, renegat i corruptor de la joventut (sic). I la resta de la comunitat matemàtica d'aquell temps reaccionà d'una manera semblant. De fet, Cantor no va aconseguir cap posició a l'Acadèmia d'acord amb la seua enorme vàlua i influència en les matemàtiques. Després de freqüents crisis mentals, va acabar els seus dies en una clínica mental, el 1918.

Malgrat l'oposició inicial, una nova generació dei lògics i matemàtiques, entre els quals podem citar **Gottlob Frege** (1848-1925), **Bertrand Russell** (1872-1970) o **David Hilbert** (1862-1943), va començar a contemplar amb altres ulls la teoria del conjunts infinits i dels nombres transfinits. Per comprovar-ho, hi ha prou amb aquest paràgraf escrit per Hilbert el 1925:

«*Ningú ens podrà expulsar del paradís que Cantor ha creat per a nosaltres*».

Però no tots pensaven de la mateixa manera: els nazis varen incloure la teoria de Cantor dels transfinits com de tipologia jueva i especialment "degenerada".

En les matemàtiques actuals, la teoria de Cantor de nombres transfinits té plena vigència i s'utilitza, per exemple, en teoria de nombres o en anàlisis funcional.

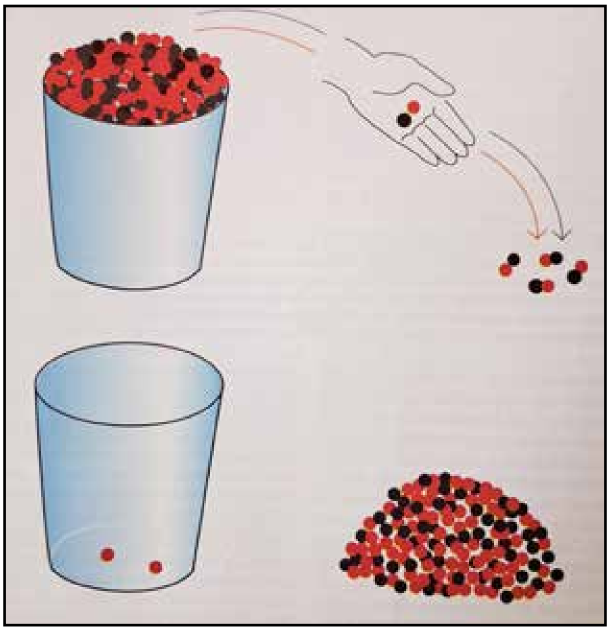
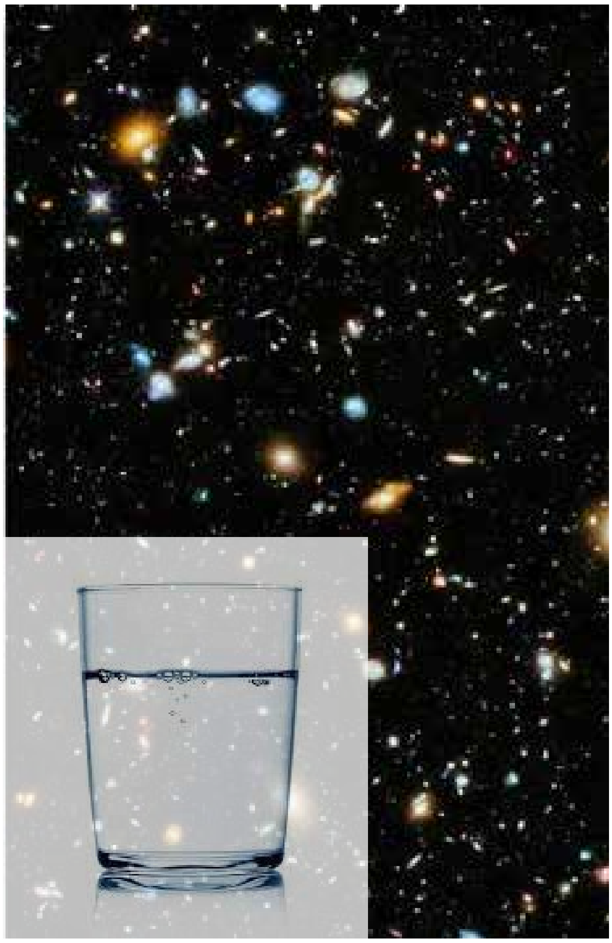


Fig. 1

En les matemàtiques actuals, la teoria de Cantor de nombres transfinits té plena vigència i s'utilitza, per exemple, en teoria de números o en anàlisis funcional.



Imatge de camp profund feta pel telescopi espacial Hubble que mostra una gran quantitat de galàxies. Possiblement el telescopi James Webb, llançat recentment, en descobrirà encara més. Actualment s'estima que hi ha unes 10^{23} estrelles a tot l'univers observable. Aproximadament el mateix nombre de molècules que hi ha en menys de mig got d'aigua.

Es poden comparar les grandàries de dos conjunts (fins i tot infinits) emparellant llurs respectius elements. En la figura 1, clarament hi ha més boletes en el got de dalt que en el de baix. Galileu va ser el primer savi conegut que aplicà aquest mètode per comparar, per exemple, els nombres naturals i els seus quadrats. O nombres naturals i senars... Es pot establir una correspondència biunívoca, un a un entre ells, cosa que li semblava paradoxal, per això que va concloure que no era possible comparar conjunts infinits. En canvi, Cantor va desenvolupar una teoria dels anomenats nombres transfinits, que permetia parlar amb rigor de diferents grandàries dels conjunts infinits. Aquells que es poden posar en correspondència amb els naturals s'anomenen numerables, como per exemple, els nombres racionals. Per contra, els nombres reals formen un conjunt no numerable. Dit d'una manera laxa, hi ha més nombres reals que de naturals, però hi ha tants nombres naturals com de senars.

Nombres naturals	1	2	3	4	5	6...
	↓	↓	↓	↓	↓	↓
Quadrats perfectes	1,	4,	9,	16,	25,	36...
Nombres imparells	1,	3,	5,	7,	9,	11...
Nombres parells	2,	4,	6,	8,	10,	12...
Nombres primers	2,	3,	5,	7,	11,	13...

El cardinal dels nombres naturals, perfectes, senars, parells o primers és el mateix: alef0. Els seus conjunts tenen la mateixa grandària.