

Física escolar

Què és dividir?

Albert Gras Martí

Físic · Membre de l'IEC

Els fonaments dels nostres coneixements sovint són ben febles.[1] Moltes persones acaben l'etapa de formació escolar sense saber, per exemple, què vol dir "multiplicar", com ara $5 \cdot 2$, o "dividir", $8/2$. Potser saben fer multiplicacions o divisions ben llargues, però no saben explicar el significat d'allò que fan de manera mecànica, algorímicament [2], Figura 1. Probablement, si que diran que multiplicar és agregar: $5 \cdot 2 = 5 + 5 = 2 \cdot 5 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2$, i que, per tant, multiplicar és una manera ràpida de sumar. També poden arribar a dir que la divisió és l'operació inversa de la multiplicació, perquè si $12/4 = 3$, aleshores $3 \cdot 4 = 12$, i que dividir és distribuir, repartir: així, $8/2$ vol dir partir 8 en dues parts iguals. Efectivament, així ho descriu la Vikipèdia: "La divisió és una operació aritmètica que serveix per a expressar matemàticament l'acció de repartir una entitat entre un cert nombre d'elements."

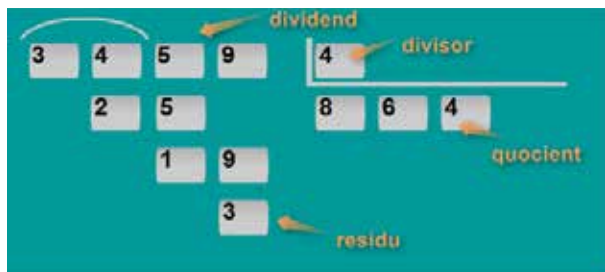


Figura 1: Un algorisme per a fer divisions llargues.

Ara bé, si la divisió genera nombres més petits ($35/7 = 5$), perquè estem repartint 35 unitats entre 7 grups, per què la divisió de 5 entre $1/2$ dona un nombre més gran: $5/(1/2) = 10$, major que 5 ($10 > 5$)? Per què, si dividim (repartim) una unitat entre $1/4$, $1/(1/4) = 4$, obtenim un nombre major que la unitat de partida?

A l'escola podem "ensenyar" a fer divisions, o a "parlar" francès, o a calcular derivades, sense que els alumnes aprenguen el significat de les operacions esmentades, ni com fer servir l'idioma quan visiten París.

Significats dels quocients

En moltes disciplines es defineixen magnituds en forma de divisions: densitat, velocitat, camp elèctric, preu d'un producte, etc., i convé saber interpretar el significat dels quocients, tant de manera operativa com verbal. Vegem-ho.

a) **Dividim nombres.** Si dividim dos nombres, com ara $465/23$, obtindrem quantes vegades està contingut el número 23 en el 465. Aquí, una divisió és una manera ràpida de comptar el nombre de subtraccions de 23 unitats del nombre 465. Hom podria dir que la divisió (substracció) és l'operació inversa de la multiplicació (addició).

b) **Dividim magnituds homogènies.** Dividim ara dos nombres corresponents a la mateixa magnitud, com ara l'alçada de dos edificis, h_2/h_1 . Quin significat té ara el resultat de la divisió? El quocient ens serveix de comparació: ens diu quantes vegades és més alt (o més baix) un edifici que l'altre.

c) **Dividim magnituds no homogènies.** Si dividim magnituds no homogènies, com ara massa i volum [$m(g)/V(cm^3)$], o bé desplaçament i temps [$\Delta x(m)/\Delta t(s)$], no estem, òbviament, comparant les dues magnituds, ni dividint-les en parts iguals, ni veient quantes vegades una magnitud està continguda en l'altra. En aquest cas, el quocient ens diu quina quantitat de la magnitud del numerador està associada amb una unitat de la magnitud representada en el denominador. Per això parlem, per exemple, en el segon exemple anterior de metres per segon (metres en un segon).

d) **Dividim magnituds més complexes.** Finalment, podem trobar divisions més sofisticades. Per exemple, si tenim 500 g d'un material que té una densitat de $3,0 \text{ g/cm}^3$, el quocient $500 \text{ g}/(3,0 \text{ g/cm}^3)$ ens diu quants "paquets" de $3,0 \text{ g}$ estan continguts en la mostra de 500 g. I com que cada "paquet" correspon a 1 cm^3 , hem obtingut el nombre de cm^3 de la mostra.

La proposta és, doncs, que els alumnes no aprenguen, només, a dir que el quocient $g/(g/cm^3)$ són cm^3 , per una simple qüestió d'àlgebra ($1/(1/8) = 8$), sinó que també siguin capaços de raonar una resposta verbal llarga, com la del paràgraf anterior.

e) En general, podem concloure, el quocient a/b sempre ens dona el nombre de "a" per cada unitat de "b". Els alumnes que interioritzen (i sàpiguen expressar verbalment) els diferents significats de les divisions anteriors no tindran ara dificultat per a explicar què obtenim si tenim 8 regals i 4 xiquets, i fem la divisió $8/4$, o si obtenim el quocient $4/8$. En un cas es tracta del nombre de regals per xiquet (2) i en l'altre el nombre de xiquets per regal ($1/2$). Resulta divertit observar la cara dels alumnes primerencs quan s'adonen que $1/2$ correspon a mig xiquet, i protesten perquè no es pot "dividir" una persona.

Fermions i bosons: Els àtoms no estan buits i les forces clàssiques són observables [3]

Comencem per recordar que els electrons són “fermions”, és a dir, partícules amb espín fraccionari, $\frac{1}{2}$, mentre que els “bosons” (els fotons, els gravitons) tenen espín enter, 1, 2. (Un altre dia tornarem al tema de l’espín). Com que dos electrons són fermions idèntics, totalment indistingibles, la funció d’ona que els descriu esdevé nul·la quan la calculem en un mateix punt: dos electrons no poden ocupar el mateix lloc de l’espai. Anàlogament, aprenem en química que un estat amb un conjunt determinat de nombres quàntics (n , l , m_l , m_s) només pot ser ocupat per un electró. És l’anomenat Principi d’Exclusió de Pauli [4], del qual es deriva la taula periòdica dels elements. El que ens interessa ací és el fet que els fermions ocupen espai, com ara comentarem.

Els bosons, per altra banda, es comporten de manera ben diferent. Si tenim dos bosons idèntics en el mateix punt de l’espai i en el mateix estat quàntic no passa res: la funció d’ona que els descriu no s’altera. Als bosons (fotons, gravitons) els agrada amuntegar-se, l’un damunt l’altre, com més va millor i, com a conseqüència, donen lloc als camps de força de la física clàssica. Els bosons són excitacions que van acumulant-se en quantitats enormes, fins que tenen un aspecte clàssic, no quàntic. Això explica el fet que els camps elèctric, magnètic i gravitatori ens els trobem en el món clàssic macroscòpic.

Per exemple, en un feix de llum làser d’una freqüència determinada, f , i potència P (energia per segon), el nombre de fotons (que són bosons) que veiem per segon és immens (calculable fàcilment com $P/(hf)$, on h és la constant de Planck); per això el raig de llum (format per bosons) és un observable en el món clàssic.

Tornem, però, als electrons dels àtoms. La matèria té les formes i les configuracions que observem perquè no podem acumular electró rere electró orbitant el nucli en el mateix estat quàntic: només hi caben un màxim de dos electrons, amb espins alineats en sentit oposat, $\pm\frac{1}{2}$. Això fa que una taula de fusta, per exemple, no col·lapsi. Açò contradueix la frase que llegim en moltes publicacions [5] (Figura 2) i que afirma que “els àtoms –i així mateix el nostre cos, per exemple– són gairebé espai buit”. L’afirmació és falsa perquè els àtoms són principalment una funció d’ona i les funcions d’ona dels electrons ocupen espai. No es tracta d’una qüestió purament filosòfica, és un fet d’importància cabdal perquè explica la solidesa de la matèria.

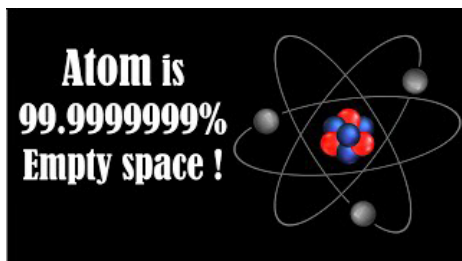


Figura 2: Diuen els textos que els àtoms són gairebé espais buits.

Interpretacions de la Mecànica Quàntica (MQ)[6]

Molts físics senten desconcert sobre alguns aspectes de la Mecànica Quàntica (MQ), com ara el relacionat amb la manera en què la funció d’ona evoluciona en el temps. Aquesta evolució està governada per l’equació de Schrödinger, una equació determinista i sense cap element d’aleatorietat. Tanmateix, quan hom fa una mesura (un experiment) sobre un sistema, la funció d’ona canvia de manera discontinua, deixa d’estar regida per l’equació de Schrödinger, i col·lapsa cap a un dels estats propis del sistema, i ho fa d’una manera probabilística, Figura 3.

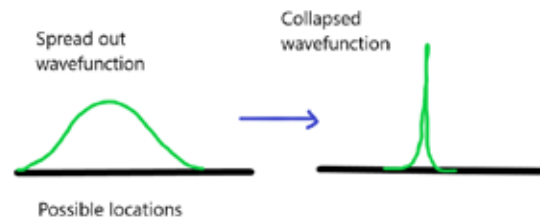


Figura 3: Esquerra: La funció d’ona estesa descriu les possibles ubicacions d’una partícula. Dreta: Quan fem una mesura, la partícula es troba en un lloc concret, la funció d’ona ha col·lapsat.

Dues són les interpretacions més resseguides de la MQ, la de Copenhaguen i la dels Molts Mòns (també coneguda com el Multivers, el multiunivers). No tracten de cercar una nova teoria que reemplaci la MQ sinó, en paraules de David Tong, “de trobar paraules reconfortants que ens permeten embolcallar les equacions i dormir en pau, sense parar-nos a pensar en les sorprenents i poc entenedores conclusions que es deriven de la MQ.”

Alternativament, per no sentir-nos incòmodes amb les conseqüències de la MQ podríem optar pel consell de N. David Mermin, un físic de l’Estat Sòlid que va espetar: Cal·leu i calculeu! Es referia al fet que la MQ és la teoria científica més potent que mai no s’ha inventat, i que proporciona respostes gens ambigües a qualsevol experiment que hem ideat fins ara. El fet que les respostes que dona la MQ siguin de naturalesa estadística està compensat de sobres pel fet que són respostes correctes sobre el món que habitem.

Tornem als dos intents més reeixits, tot i que contradictoris i desassossegadors, de construir unes idees que ens ajuden a pensar sobre el fet quàntic. La interpretació de Copenhaguen va dominar entre els fundadors de la MQ: es prenen el col·lapse de la funció d’ona seriosament, i divideixen el nostre Univers en dos, el món quàntic (descriu per funcions d’ona i l’equació de Schrödinger) i el món familiar clàssic (descriu per les lleis de Newton). El procés de mesura proporciona un pont entre els dos mons, i fa que la naturalesa nebulosa del quantum es transmute en els enunciats concrets del món clàssic. El preu que paguem és la presència de probabilitats: la MQ només ens permet calcular la probabilitat d’obte-

nir, com a resultat del procés de mesura, un dels valors propis de la magnitud que mesurem.

La interpretació de Copenhaguen de la MQ no és satisfactòria: no explica per què de sobte, quan es fa una mesura, l'equació de Schrödinger deixa d'actuar i la funció d'ona col·lapsa. A més d'això, tant nosaltres com l'aparell experimental estem fets d'àtoms i, per tant, també hauríem d'obeir les lleis de la MQ. D'altra banda, no està clar on s'ha de traçar la línia divisòria entre allò clàssic i allò quàntic.

Una altra interpretació de la MQ, coneguda com la teoria del Multivers, va ser suggerida per **Augh Everett** en els anys 1950. La idea és prendre's seriosament l'equació de Schrödinger depenent del temps. Per exemple, una partícula que passa per dues esclatxes es descriu amb una funció d'ona que no s'esvaeix (que pren valors no nuls) al voltant de les dues esclatxes. Diem que la partícula es troba en una superposició d'estats, situada en dos llocs alhora. Ara bé, si col·loquem un aparell de detecció en una de les esclatxes, la nova funció d'ona que incorpora la partícula i l'aparell de mesura no col·lapsa: segueix obeint l'equació de Schrödinger. L'aparell de detecció també es troba en una superposició amb la partícula detectada i la no detectada. Quan posteriorment mirem l'aparell per fer la mesura, també nosaltres ens dividim en una superposició. I així successivament. Els molts mons són les diferents branques de la funció d'ona que van creant-se com a conseqüència de confiar en la veracitat de l'equació de Schrödinger [7], Figura 4. Així, cada vegada que ocorre un procés quàntic (o subatòmic) en qualsevol punt de l'Univers, la funció d'ona de l'Univers es divideix de nou en noves funcions, que descriuen les opcions possibles. D'aquesta manera, s'estan creant contínuament universos paral·lels.

Hi ha també aspectes poc satisfactoris en la interpretació MQ de molts mons. Per exemple, en

ignorar el col·lapse de la funció d'ona, la regla de **Born** (tan important per a construir les probabilitats d'obtenir un determinat resultat de la mesura) s'ha d'afegir *ad hoc*. Tampoc no s'explica per què només ens sentim a nosaltres mateixos en una sola branca de la funció d'ona, més que en una superposició de tots els resultats possibles.

Hi ha una faceta important de la MQ que aporta una mica de bàlsam a les dues interpretacions anteriors, es tracta del procés conegut com a *decoherència quàntica*: A mesura que un nombre cada cop més gran de partícules s'entrellaça en una superposició d'estats, és més i més difícil mostrar efectes d'interferència quàntica. Això explica per què no es poden observar propietats quàntiques en els objectes macroscòpics. I també ajuda a entendre com pot sorgir la línia divisòria borrosa de Copenhaguen entre allò clàssic i allò quàntic, o com es podria produir la divisió dels molts mons.

Podem adoptar, però, un punt de vista alternatiu, una tercera via: podem acceptar tant la interpretació de Copenhaguen com la del multivers, juntament amb qualsevol altra. I davant d'una situació experimental concreta podem triar la interpretació que ens resulte més adequada. Aquesta ambigüitat no té cap importància, per la senzilla raó que no hi ha, fins ara, cap manera experimental de distingir les diverses interpretacions de la MQ.

Assenyala Tong, finalment, que un títol millor per a aquesta secció seria "Interpretacions de la mecànica clàssica" pel fet que, al nivell fonamental, el món és quàntic i probabilístic, i d'ell sorgeix el món clàssic amb les seues lleis físiques deterministes. Si hi ha una pregunta a respondre és com sorgeix el món clàssic a partir del quàntic. Buscar una explicació del comportament quàntic en termes de la nostra visió, provinent del món clàssic, seria com cercar en la botànica la manera d'entendre les propietats dels quarks.



Figura 4: Segons la interpretació dels multi-mons, la paradoxa mecànicoquàntica del gat de Schrödinger no existeix. Cada succés quàntic esdevé un punt de ramificació. El gat és alhora viu i mort abans d'obrir la caixa, i el gat viu i mort se separen en branques diferents del multivers. Les dues branques són igualment reals, però no interaccionen entre si.

Notes

[1] Consideracions extretes del llibre d'Arons: *Teaching Introductory Physics*, Wiley (1997).

[2] <https://agora.xtec.cat/escsantiga/recursos-per-cicle-superior/mates-5e-practiquem-divisions/>

[3] Notes extretes del pòdcast de Sean Carroll <https://www.preposterousuniverse.com/podcast/2024/05/13/275-solo-quantum-fields-particles-forces-and-symmetries/>

[4] El Principi de Pauli es pot deduir en la Teoria Quàntica de Camps, de la qual vam parlar en l'exemplar 26 de DUALDEU, p. 19.

[5] <https://www.youtube.com/watch?v=QisRyvJeC-U>

[6] Notes extretes dels apunts de Mecànica Quàntica de David Tong, <http://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/quantum.html>

[7] <https://www.cantorsparadise.org/ways-of-interpreting-quantum-mechanics-a-quick-look-864d055a3b20/>