

El problema dels tres cossos

Miguel Ángel Sanchis-Lozano

Departament de Física Teòrica · IFIC, Centre mixt CSIC · Universitat de València

Nicolás Sanchis Gual

Departament d'Astronomia i Astrofísica, Universitat de València

Entendre com es comporten tres cossos sota l'atracció gravitacional mútua és una qüestió d'extraordinària importància en física, no tan sols en si mateix, sinó perquè va conduir, a final del segle XIX, a qüestionar nocions fonamentals com el determinisme clàssic i l'emergència del concepte de comportament caòtic. Certament, el problema dels tres cossos ha transcendit l'àmbit de la física, i ha arribat fins i tot al llenguatge col·loquial per a descriure situacions de molt difícil o impossible solució. Prova d'això és que una coneguda sèrie de Netflix, basada en una novel·la de Liu Cixin, té aquest nom.

La qüestió es remunta històricament a Isaac Newton, que va formular la llei de la gravitació universal en la seua obra fonamental *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* (1687), en la qual postulava que la força d'atracció entre dos cossos és proporcional al producte de les seues masses i inversament proporcional al quadrat de la distància que els separa. Les forces gravitatòries es concebien aleshores com interaccions a distància, és a dir, es propagaven instantàniament d'un punt a altre de l'espai. En conseqüència, si un objecte canviava de posició o trajectòria (per exemple, quan xoca amb un altre), l'efecte gravitatori era percebut de manera immediata pels altres cossos, independentment de la seua proximitat o llunyania. Hui sabem que aquesta suposició contradiu la teoria especial de la relativitat publicada el 1905 per Albert Einstein (1879-1955), i que es requereix un temps finit per a la propagació de qualsevol senyal limitada per la velocitat de la llum en el buit.

No obstant això, fins i tot acceptant la llei de Newton com una excel·lent aproximació per a descriure les òrbites de cossos celestes propers en termes astronòmics (com la Terra i el Sol), el problema es complica notablement quan es consideren conjuntament tres o més cossos. En aquest cas, no existeix en general una solució exacta, és a dir, no és possible expressar la trajectòria temporal dels cossos en l'espai mitjançant fórmules explícites en termes de funcions analítiques conegudes.

Això no implica que el resultat de l'evolució temporal d'un sistema siga arbitrari en una descripció clàssica: l'univers continua sent determinista, amb el futur completament i unívocament determinat pel passat. Aquesta visió mecanicista va ser profundament qüestionada per Henri Poincaré (1854-1912) en un treball monumental presentat a un concurs de matemàtiques a Suècia a final del segle XIX, concurs que va guanyar.



Sistema Terra-Lluna-Sol, amb un comportament no caòtic durant milions d'anys. (Font: Wikipèdia)

Malgrat contenir inicialment un error, que el mateix Poincaré va esmenar abans de la publicació definitiva en *Acta Mathematica* el 1890, Karl Weierstrass (1815-1897), membre del jurat, va afirmar: "Si bé aquest treball no pot ser considerat com la solució completa del repte plantejat, és d'una importància tal que la seua publicació marcarà el començament d'una nova era en la història de la mecànica celeste".

I no solament celeste: aquest treball va assenyalar l'inici de la teoria del caos clàssic, que va transformar profundament la nostra comprensió dels sistemes deterministes no sols governats per la gravetat, sinó per qualsevol tipus d'interacció, i la incapacitat de predir el futur. Més tard, ja dins el context de la mecànica quàntica, va emergir el concepte de caos quàntic, que no constitueix una extensió directa del caos clàssic, sinó una reinterpretació dels seus trets essencials en un marc on ja no existeixen trajectòries ni òrbites ben definides. Tot i això, els dos comparteixen un tret fonamental: l'aparició de comportaments altament complexos i, en la pràctica, imprevisibles.

Tanmateix, existeixen sistemes, com el sistema Terra-Lluna-Sol, que romanen estables durant períodes molts llargs, de centenars de milions d'anys, llevat de possibles pertorbacions externes, com el pas proper o la col·lisió amb algun cos celeste gran: així es va originar la Lluna. En el sistema solar complet, l'estabilitat disminueix: ocasionalment, alguns asteroides canvien d'òrbita, s'acosten generalment al Sol o són expulsats del sistema solar, tot i que també existeix la possibilitat de col·lisió amb la Terra, com ja va succeir en un passat remot i que va provocar l'extinció dels dinosaures.

D'altra banda, sovint s'associa el comportament caòtic a sistemes complexos formats per un gran nombre de cossos, com és el cas de l'atmosfera. L'evolució del clima i les dificultats per

a predir-lo són un exemple paradigmàtic. És habitual recórrer a l'anomenat efecte papallona per a il·lustrar l'extrema sensibilitat a les condicions inicials: el simple aleteig d'una papallona al Brasil podria, en principi, acabar contribuint a produir una tempesta a Europa.

Ara bé, la complexitat d'un sistema físic no és un requisit indispensable perquè aparega un comportament imprevisible però encara plenament clàssic. El caos pot manifestar-se fins i tot en sistemes amb pocs graus de llibertat, com ara

un pèndol doble o simple sotmès a una força externa periòdica. En aquests casos, equacions de moviment ben definides de partida donen lloc a una evolució extremadament sensible a les condicions inicials, la qual cosa limita severament la capacitat de predicció a llarg termini.

1 <https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/3/39/GodfreyKneeller-IsaacNewton-1689.jpg>

2 https://en.wikipedia.org/wiki/Pierre-Simon_Laplace

3 <https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/4/46/Лагранж.jpg>

El problema dels 3 cossos en la mecànica clàssica

En mecànica clàssica, el problema dels tres cossos sorgeix en considerar tres objectes, de qualsevol massa, sotmesos a l'atracció gravitatòria mútua. Partint d'unes posicions i velocitats inicials determinades (condicions inicials), es tracta de calcular les coordenades de posició i les velocitats dels tres cossos en un instant posterior (o anterior). Aparentment, es tracta d'un problema de batxillerat per la simplicitat del plantejament, però resulta irresoluble en forma exacta i va donar lloc al concepte modern de caos clàssic. Fou Edward Lorenz qui, el 1963, va popularitzar aquest terme d'origen grec (Χαος), amb un significat original d'obertura, abisme, buit immens.



Isaac Newton
(1642-1727)



Pierre S. Laplace
(1749-1827)



Joseph L. Lagrange
(1736-1813)

Els punts de Lagrange

Quan Pierre-Simon Laplace va publicar el 1802 el seu *Traité de mécanique céleste*, Napoleó Bonaparte, que havia estat alumne seu a l'escola militar de París i que era amic de preguntes compromeses, li va preguntar directament: "Heu escrit un llibre sobre el sistema de l'univers, sense haver esmentat ni una sola vegada el seu creador." Laplace va respondre: "No he necessitat aquesta hipòtesi, Sire."

La resposta de Laplace subratllava que Newton, un segle abans, en aplicar la seua llei de gravetat al sistema solar, detectava certes irregularitats en les òrbites planetàries, que conduïen a una inestabilitat amb el pas del temps. Newton suposava la intervenció de Déu per a corregir-les.

Es diu que el matemàtic Joseph-Louis Lagrange, en conèixer la resposta de Laplace, va comentar: "Ah, però és una bella hipòtesi, això explica moltes coses!"

Una vegada Laplace va tindre coneixement per Napoleó de la rèplica de Lagrange, va afegir al seu torn: "Sí, explica moltes coses, però no en predu cap!"

Per tal d'entendre l'estabilitat del nostre sistema solar, Lagrange ja havia estudiat el moviment dels planetes i de la Lluna sota l'acció de la gravetat, i va trobar algunes configuracions particularment estables. Els ara anomenats punts de Lagrange són posicions especials en un sistema de dos cossos massius, com el Sol i la Terra, en les quals un tercer cos de massa insignificant pot romandre en equilibri relatiu respecte dels altres dos en compensar-se les forces que hi actuen. Lagrange va identificar cinc d'aquests punts, denominats L1 a L5: tres se situen sobre la línia que uneix els dos cossos principals, i els altres dos formen triangles equilàters amb aquests. Hui en dia, aquests punts són fonamentals en astronomia i exploració espacial, ja que s'hi situen satèl·lits i telescopis (com el James Webb) per a mantenir posicions estables.

En el futur, la missió LISA (*Laser Interferometer Space Antenna*) de l'Agència Espacial Europea aprofitarà una òrbita relacionada amb un d'aquests punts de Lagrange. LISA estarà formada per tres satèl·lits que volaran en formació, separats per milions de quilòmetres, i utilitzaran rajos làser per a detectar ones gravitatòries: diminutes vibracions de l'espai-temps produïdes per fenòmens extrems, com la fusió de forats negres.