

El regle, el compàs i la **quadratura del cercle**

Ramon Esteban Romero

Departament de Matemàtiques · Universitat de València

Els antics grecs tenien un interès especial en les figures que es podien construir fent servir un regle i un compàs. El regle dels grecs és només una línia recta, tan llarga com calga, sense marques de mesura, mentre que el compàs permet construir circumferències amb un centre donat i que passen per un altre punt donat, però no es pot fer servir per a traslladar distàncies. Suposem que ens donen uns quants punts. El problema és determinar quins són tots els punts que es poden construir aplicant un nombre finit de vegades les instruccions següents:

1.- Si A i B són dos punts diferents construïts, podem construir la recta r_{AB} que els conté.

2.- Si A i B són dos punts diferents construïts, podem construir la circumferència C_{AB} de centre A que passa per B .

3.- Si r i s són dues rectes diferents construïdes, podem construir els punts de la intersecció de r i s .

4.- Si C i D són dues circumferències diferents construïdes, podem construir els punts de la intersecció de C i D .

5.- Si C és una circumferència construïda i r és una recta construïda, podem construir els punts de la intersecció de C i r .

Quan diem que hem construït una recta o una circumferència, no diem que hem construït tots els seus punts, sinó que n'hem construït dos en el cas de la recta o el centre i un punt en el cas de la circumferència. Els únics punts que es poden construir corresponen a l'aplicació d'aquestes regles, es a dir, que apareixen a la intersecció de rectes construïdes, circumferències construïdes, o recta i circumferència construïdes.

Els antics grecs tenien un interès especial en les figures que es podien construir fent servir un regle i un compàs. El regle és només una línia recta, sense marques de mesura, mentre que el compàs permet construir circumferències amb un centre donat i que passen per un altre punt donat, però no es pot fer servir per a traslladar distàncies.

Considerarem el cas més senzill: que tinguem dos punts O i X . Podem suposar que O és l'origen d'un sistema de referència cartesià, amb coordenades $(0,0)$, i que X té coordenades $(1,0)$ en aquest sistema. A partir d'ara, identificarem cada punt amb les seues coordenades. El problema natural és determinar com poden ser les coordenades dels punts que es poden construir a partir de O i X fent servir les regles anteriors. Aquests punts es diran construïbles. Direm que el nombre real x és construïble si $(x,0)$ ho és. També podem treballar amb nombres complexos identificant (a,b) amb $a+bi$, però, per simplicitat, només treballarem amb nombres reals.

Un problema que ja es plantejaven els grecs és el de la quadratura del cercle: donat un cercle, és possible construir amb regle i compàs

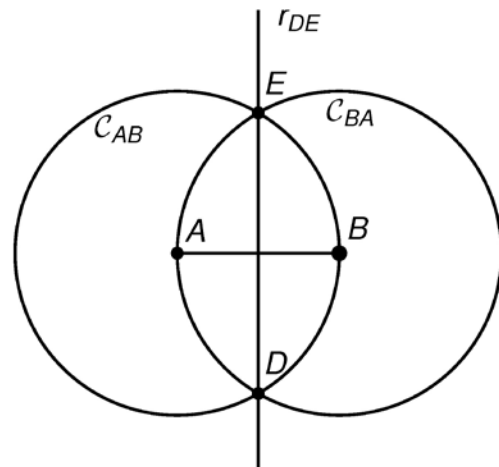


Fig. 1. Mediatriu (Proposició 1)

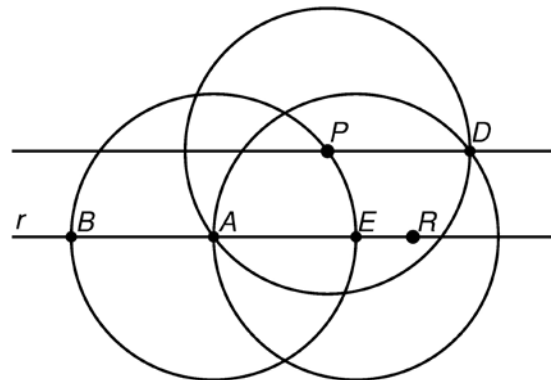


Fig. 2. Recta paral·lela (Proposició 2)

un quadrat que tinga la mateixa àrea que el cercle? En altres paraules, es pot construir un quadrat de costat $\sqrt{\pi}$? Volem provar que aquest problema no té solució. De fet, l'expressió «quadratura del cercle» s'associa a problemes irresolubles.

En els cursos de dibuix tècnic s'estudien algunes construccions amb regla i compàs.

Proposició 1. La mediatriu i el punt mitjà d'un segment AB són construïbles.

Demostració. Les circumferències C_{AB} i C_{BA} es tallen en D i E (Fig. 1). La recta r_{DE} és la mediatriu del segment AB. Aquesta recta talla la recta r_{AB} en el punt mitjà M de AB. Per tant, r_{DE} i M són construïbles.

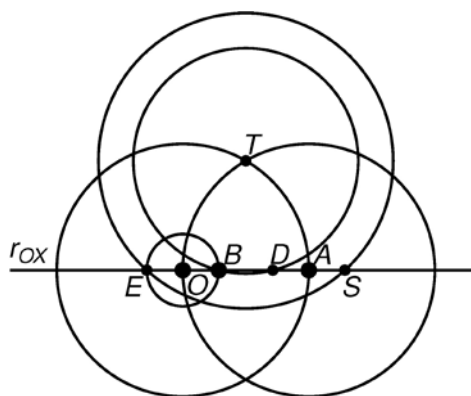


Fig. 3: Suma i diferència (Proposició 5)

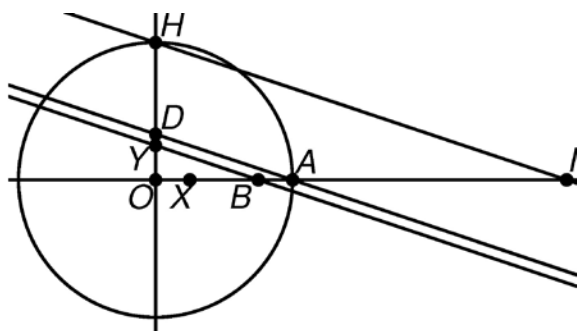


Fig. 4: Producte i quocient (Proposició 4)

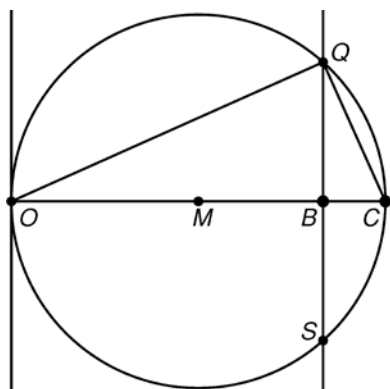


Fig. 5: Arrel quadrada (Proposició 7)

Proposició 2. La recta paral·lela a una recta construïble per un punt construïble és construïble.

Quan diem que hem construït una recta o una circumferència, no diem que hem construït tots els seus punts, sinó que n'hem construïts dos en el cas de la recta o el centre i un punt en el cas de la circumferència.

Demostració. Suposem que A és un punt construïble de la recta construïble r i que P és un punt exterior a r (Fig. 2). Considerem un dels punts de tall E de la circumferència C_{AP} amb r, el més proper a P (si els dos punts es troben a la mateixa distància, en comptes de A fem servir un altre punt construïble de r). Considerem ara el punt de tall D de C_{PA} amb C_{EA} que no és A. La recta r_{PD} és paral·lela a r (de fet, el quadrilàter AEDP és un rombe).

D'ara endavant, per a fer les construccions més comprensibles, farem servir directament algunes de les construccions prèvies, que sabem que es poden fer amb regla i compàs.

Proposició 3. El nombre x és construïble si, i només si, ho és (0,x). En particular, $Y=(0,1)$ és construïble.

Demostració. Suposem que $x \neq 0$. Si $A=(x,0)$ és construïble, el punt A' pertany a la intersecció de r_{OA} i C_{OA} . La mediatriu m de AA' és construïble i un punt de la intersecció m amb C_{OA} és $B=(0,x)$. Recíprocament, si $B=(0,x)$ és construïble, un punt de la intersecció de C_{OB} amb r_{OX} és $(x,0)$.

La demostració anterior permet construir la recta perpendicular a una recta construïda que passa per un punt construït.

Proposició 4. El punt $P=(x,y)$ és construïble si, i només si, ho són x i y.

Demostració. Suposem que $P=(x,y)$ és construïble. Les rectes paral·leles a r_{OY} i r_{OX} que passen per P tallen r_{OX} i r_{OY} en els punts $(x,0)$ i $(0,y)$, respectivament. Recíprocament, suposem $A=(x,0)$ i $B=(0,y)$ construïbles. La rectes paral·leles a r_{OY} i r_{OX} per A i B, respectivament, es tallen en $P=(x,y)$.

Veurem ara que els resultats d'algunes operacions aritmètiques amb nombres construïbles són també nombres construïbles.

Proposició 5. La suma i la diferència de dos nombres construïbles és construïble.

Demostració. Podem suposar que O, A i B es troben en la recta r_{OX} i són construïbles (Fig. 3). Considerem un dels punts de tall T de C_{OA} i C_{AO} . Anomenem E el punt de tall de OB i r_{OX} que no és B. Si D és el punt de tall de C_{TB} i r_{OX} que no és B i S és el punt de tall de C_{TE} amb r_{OX} que no és S, aleshores $OD=OA-OB$ i $OS=OA+OB$. Concloem que D i S són construïbles.

Proposició 6. El producte i el quocient de dos nombres construïbles no nuls són construïbles.

Demostració. Ho mostrarem per a nombres positius (Fig. 4). Suposem que A i B són dos punts construïbles sobre la recta r_{OX} . Considerem la recta r_{BY} on $Y=(0,1)$, i construïm la recta paral·lela per A, que talla r_{OY} en D. Pel teorema de Tales, $OD=O \cdot AO/B$. Considerem ara el punt de tall H de C_{OA} amb r_{OY} i la recta paral·lela a BY que passa per H. Aquesta recta talla r_{OX} en un punt I que, pel teorema de Tales, satisfà que $OI=OA \cdot OB$.

Combinant aquestes proposicions, obtenim que tots els nombres racionals són construïbles.

Proposició 7. L'arrel quadrada d'un nombre real positiu x construïble és construïble.

Demostració. Els punts $B=(x,0)$ i $C=(x+1,0)$ són construïbles (Fig. 5). El seu punt mitjà M és construïble. La circumferència C_{MO} talla la recta paral·lela a r_{OY} que passa per B en dos punts Q i S. Si Q és al semiplà superior, $Q=(x,\sqrt{x})$ pel teorema de l'altura de triangles rectangles. Així, $\sqrt{x}$ és construïble.

Podem considerar el conjunt K de tots els nombres reals x per als quals hi ha una successió finita $x_1=0, x_2=1, \dots, x_n=x$ de manera que per a $3 \leq k \leq n$, x_k es pot calcular a partir de $x_1, \dots, x_{(k-1)}$ fent servir les operacions de suma, resta, multiplicació, divisió i arrel quadrada. Les proposicions anteriors mostren que tots els elements de K són construïbles i que $Q \subseteq K$.

Proposició 8. Suposem que $A=(a_1, a_2)$ i $B=(b_1, b_2)$ són dos punts amb a_1, a_2, b_1, b_2 en K.

La recta r_{AB} i la circumferència C_{AB} admeten equacions amb coeficients en K.

Els punts de la intersecció de dues circumferències diferents amb equacions amb coeficients en K, una recta i una circumferència amb equacions amb coeficients en K o dues rectes diferents amb equacions amb coeficients en K tenen coordenades en K.



Fig. 6: Carl Louis Ferdinand von Lindemann (1852-1939)

Demostració. La recta r_{AB} té equació

$$(b_1 - a_1)(y - a_2) - (b_2 - a_2)(x - a_1) = 0$$

i la circumferència C_{AB} té equació

$$(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 = (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2$$

amb tots els coeficients en K. La resolució del sistema format per dues equacions d'aquests tipus es fa amb operacions de suma, resta, multiplicació, divisió i arrel quadrada amb els coeficients, per tant, les solucions tenen coordenades en K.

Un problema que ja es plantejaven els grecs és el de la quadratura del cercle: donat un cercle, és possible construir amb regla i compàs un quadrat que tinga la mateixa àrea que el cercle?

Com que O i X tenen coordenades en K, tot punt construïble té coordenades en K. Així:

Teorema 9. El conjunt dels nombres reals construïbles coincideix amb K.

Els nombres que són arrels de polinomis amb coeficients racionals s'anomenen algebriques (o algebraics). Una propietat coneguda dels nombres algebriques, que s'estudia en la teoria d'extensions de cossos, és que un nombre arrel d'un polinomi amb coeficients algebriques és algebriac (vegeu, per exemple). Per tant, de la proposició 8 i el teorema 9, obtenim:

Teorema 10. Tots els nombres construïbles són algebriques.

De fet, es pot comprovar que tot nombre construïble és arrel d'un polinomi irreductible amb coeficients racionals i grau una potència de 2. Açò és fonamental per a demostrar que, per exemple, el problema clàssic de la duplicació del cub amb regla i compàs (és construïble $\sqrt[3]{2}$?) tampoc no admet solució.

Tornem a la quadratura del cercle. Lindemann va demostrar l'any 1882 el resultat següent:

Teorema 11. El nombre π no és algebriac.

En conseqüència:

Teorema 12. El nombre $\sqrt{\pi}$ no és construïble. En particular, la quadratura del cercle no es pot fer amb regla i compàs.

Demostració. Dir que $\sqrt{\pi}$ no és construïble equival a dir que π no és construïble. Pel teorema 10, si π fora construïble, aleshores π seria algebriac, en contra del teorema 11.

Referències

- [1] J. R. Bastida. Field extensions and Galois theory, volum 22 de Encyclopedia of mathematics and its applications. Cambridge Univ. Press, New York, 1984.
- [2] T. W. Hungerford. Algebra, volum 73 de Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 2003. Reimpressió de l'original de 1974.
- [3] F. von Lindemann. Ueber die Zahl π . Math. Ann., 20:213-225, 1882.