Introducció a les **Conjectures**

Miguel Ángel Sanchis Lozano
IFIC, Centre Mixt Universitat de València-CSIC

La formulació de conjectures ocupa un lloc molt rellevant en les ciències, i en les matemàtiques molt especialment: no es tracta de simples problemes oberts, sinó de motors intel·lectuals que inspiren noves idees, obrin camins inesperats i marquen el rumb de futurs descobriments. Algunes, com la hipòtesi de **Riemann** (1859), un dels grans misteris i reptes per a la ment humana, busquen desvelar com es distribueixen els nombres primers entre els nombres naturals a través dels intrigants zeros de la funció zeta de Riemann. Altres, com la conjectura de **Goldbach** (1742), afirmen que tot nombre parell major que 2 es pot escriure com la suma de dos nombres primers; un enunciat d'una senzillesa sorprenent que, tanmateix, ha resistit durant segles sense que fins ara s'haja trobat una demostració (vegeu l'article de **Miguel Ángel Sanchis Lozano**). La conjectura de **Polignac** (1849) amplia aquest misteri en suggerir que existeixen infinits parells de nombres primers separats per qualsevol nombre parell donat. Com a cas particular, inclou la cèlebre conjectura dels nombres primers bessons (vegeu l'article de **Marc Noy**), segons la qual existeixen infinits parells de primers que difereixen en dues unitats, com ara 5 i 7, o 11 i 13. Mentre que el teorema dels nombres primers descriu la densitat mitjana dels primers, la conjectura de Polignac aborda com es distribueixen localment. Resoldre-la suposaria un avanç decisiu en la nostra comprensió de la distribució dels nombres primers.

No totes les conjectures tenen, però, el mateix abast: al costat de les grans conjectures que poden afectar tota una disciplina, n'hi ha moltes altres, de caràcter més específic, i menys conegudes, però que exerceixen un paper important en la investigació matemàtica. Per exemple, la conjectura de **Legendre** (1808) afirma que entre dos quadrats consecutius, n^2 i $(n+1)^2$, sempre existeix almenys un nombre primer. Per exemple, si prenem n=4, entre els nombres 16 i 25 trobem els nombres primers 17 i 23. La seua importància rau en el fet que estableix una cota concreta sobre la separació dels nombres primers que no poden quedar mai massa allunyats, estant relacionada amb qüestions profundes de la teoria de nombres, com la hipòtesi de Riemann ja comentada.

D'altra banda, i pel que fa a les conjectures importants que han estat resoltes, podem citar el darrer teorema de **Fermat**, formulat el 1637, que durant més de 350 anys va constituir un dels grans enigmes de les matemàtiques. Fermat va afirmar que l'equació $x^n + y^n = z^n$ no admet solucions enteres no trivials (diferents de zero)



Adrien Marie Legendre (1752-1797). / Unknown source)



Jules Armand de Polignac (1780-1847). (http://www.bradburycollection.com/store/index.php?main_page=popup_image&pID=482)

per a n>2, i va deixar escrit al marge d'un llibre que posseïa "una demostració veritablement meravellosa", encara que massa extensa per a aquell marge… una demostració que mai no va aparéixer. Finalment, el 1994, **Andrew Wiles** va aconseguir demostrar el teorema, tancant un capítol històric i obrint noves connexions entre la teoria de nombres i la geometria aritmètica. Un altre exemple emblemàtic ja resolt és la conjectura de **Poincaré** (1904), que va desafiar els matemàtics durant gairebé un segle fins que va ser demostrada el 2003 pel matemàtic rus **Grigori Perelman**, qui va rebutjar la Medalla Fields per motius personals. La seua demostració va mostrar com una sola idea pot transformar profundament tota una disciplina.

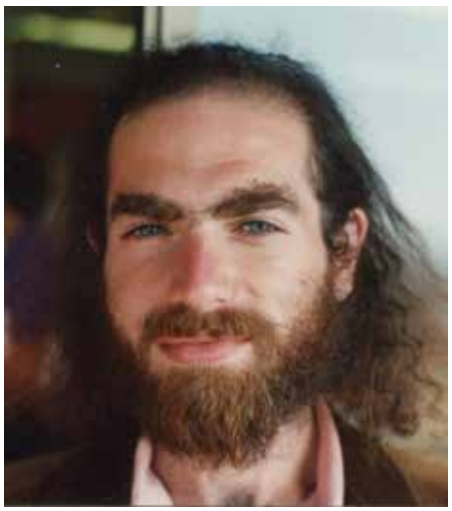
Cal dir també que hi ha problemes que, després d'un llarg període de temps, s'han demostrat irresolubles. És el cas del problema de la quadratura del cercle **(**vegeu l'article de **Ramon Esteban Romero)**, plantejat pels matemàtics grecs antics i que va quedar definitivament resolt com a impossible l'any 1882, quan **Ferdinand von Lindemann** va demostrar que π és transcendent. El problema ha quedat en l'imaginari col·lectiu com a sinònim de problema irresoluble.



Bernhard Riemann (1826-1866). (Familienarchiv Thomas Schilling)



Henri Poincaré (1854-1912). (http://www.mlahanas.de/Physics/Bios/images/HenriPoincare.jpg)



Grigori Perelman (1966). https://opc.mfo.de/detail?photo_id=12890

En física, les conjectures exerceixen un paper rellevant a l'hora d'orientar el pensament creatiu i estimular avanços conceptuals de gran abast. Així, la correspondència AdS/CFT, proposada per **Juan Maldacena** el 1997, planteja que certes teories gravitatòries definides en un espai de dimensió superior són equivalents a teories quàntiques sense gravetat formulades en una dimensió menys, i ofereix una de les vies més prometedores per a comprendre conjuntament la gravetat quàntica i la física dels forats negres. Per la seua banda, en astrofísica, la hipòtesi de la censura còsmica, formulada com a conjectura per **Roger Penrose** el 1969, sosté, en termes generals, que les singularitats gravitatòries (regions on la curvatura de l'espai-temps esdevé infinita segons la relativitat general) no haurien de ser observables directament des de l'exterior, sinó que quedarien ocultes darrere d'un horitzó d'esdeveniments. Aquesta hipòtesi evita així l'aparició de singularitats nues, que podrien posar en qüestió la predictibilitat de les lleis físiques conegudes.

Les conjectures no es formulen exclusivament en les ciències fisicomatemàtiques; també es proposen en altres branques científiques, encara que la seua resolució no es base tant en la lògica i la deducció formal com en la comprovació empírica. En aquest sentit, la homoquiralitat és una de les grans singularitats de la química de la vida: molts aminoàcids presents en els éssers vius pertanyen gairebé exclusivament a una de les dues possibles formes (quirals) especulars (a dreta i a esquerra), mentre que els sucres biològics mostren la preferència oposada. Una conjectura suggeridora és que aquesta asimetria podria haver estat preseleccionada per processos fisicoquímics anteriors a l'aparició de la vida, associats a la radiació ionitzant polaritzada i a la formació de molècules orgàniques, tant en el medi interestel·lar com en entorns terrestres primitius. La idea guarda una interessant analogia amb la violació de la paritat en física: de la mateixa manera que les interaccions febles entre partícules elementals distingeixen entre esquerra i dreta, algun mecanisme fisicoquímic primordial podria haver introduït una diminuta preferència inicial per una de les dues quiralitats moleculars, que l'evolució posterior hauria amplificat.

En resum, les conjectures constitueixen una manera de progressar en el coneixement present en una gran varietat de disciplines. Són especialment nombroses i conegudes en matemàtiques, i en particular en teoria de nombres, on algunes grans conjectures fan referència a qüestions fonamentals com la distribució dels nombres primers entre els naturals. Però també tenen un paper important en altres camps, com la física, on poden plantejar-se sobre la naturalesa de fenòmens encara no explicats, o la bioquímica, on encara es formulen hipòtesis sobre qüestions tan fonamentals com l'origen de la quiralitat de les molècules de la vida.