

La conjectura de **Goldbach**

Un enigma nascut d'una carta

Miguel Ángel Sanchis Lozano

IFIC, Centre Mixt Universitat de València-CSIC

El juny de 1742, el matemàtic prussià **Christian Goldbach** va escriure una carta al seu amic, el gran **Leonhard Euler**, amb una observació aparentment curiosa sobre els nombres primers. Goldbach afirmava que tot nombre enter major que dos podia expressar-se com a suma de tres nombres primers, considerant aleshores l'1 com a primer, tal com era habitual en aquella època. Euler va respondre pocs dies després assenyalant que, en excloure l'1 de la llista de primers, l'afirmació conduïa a una proposició molt més senzilla i elegant: tot nombre parell major que 2 pot escriure's com a suma de dos nombres primers. Aquesta reformulació, coneguda hui com la conjectura forta o binària de Goldbach, és la que ha passat a la història.

La conjectura sembla sorprenentment senzilla d'enunciar i fins i tot de comprovar per als primers nombres parells. Per exemple:

$$4 = 2 + 2$$

$$10 = 3 + 7 = 5 + 5$$

$$28 = 5 + 23 = 11 + 17$$

$$50 = 3 + 47 = 7 + 43 = 13 + 37 = 17 + 23$$

Observem que, a mesura que el nombre parell es fa més gran, augmenta el nombre de representacions possibles com a suma de dos primers. La conjectura afirma que, per a qualsevol nombre parell major que 2, sempre existirà almenys una d'aquestes representacions.

Una forma especialment suggeridora de visualitzar la conjectura de Goldbach és mitjançant l'anomenat cometa de Goldbach (vegeu la figura). Per a cada nombre parell es representa gràficament el nombre de representacions com a suma de dos primers, de manera que les diferents possibilitats de descomposició van dibuixant una estructura que recorda la cua d'un cometa. La figura permet contemplar, d'un colp d'ull, com es distribueixen les representacions dels nombres parells com a suma de primers i com, en general, el seu nombre augmenta a mesura que els nombres són més grans. La conjectura forta de Goldbach afirma que ha d'existir almenys una d'aquestes representacions per a qualsevol nombre parell, per gran que siga. Des d'aquest punt de vista, un contraexemple a la conjectura tindria una interpretació geomètrica molt senzilla: en algun lloc de la figura apareixeria una fila corresponent a un nombre parell completament buida; és a dir, el cometa presentaria de sobte un forat en la seua cua.

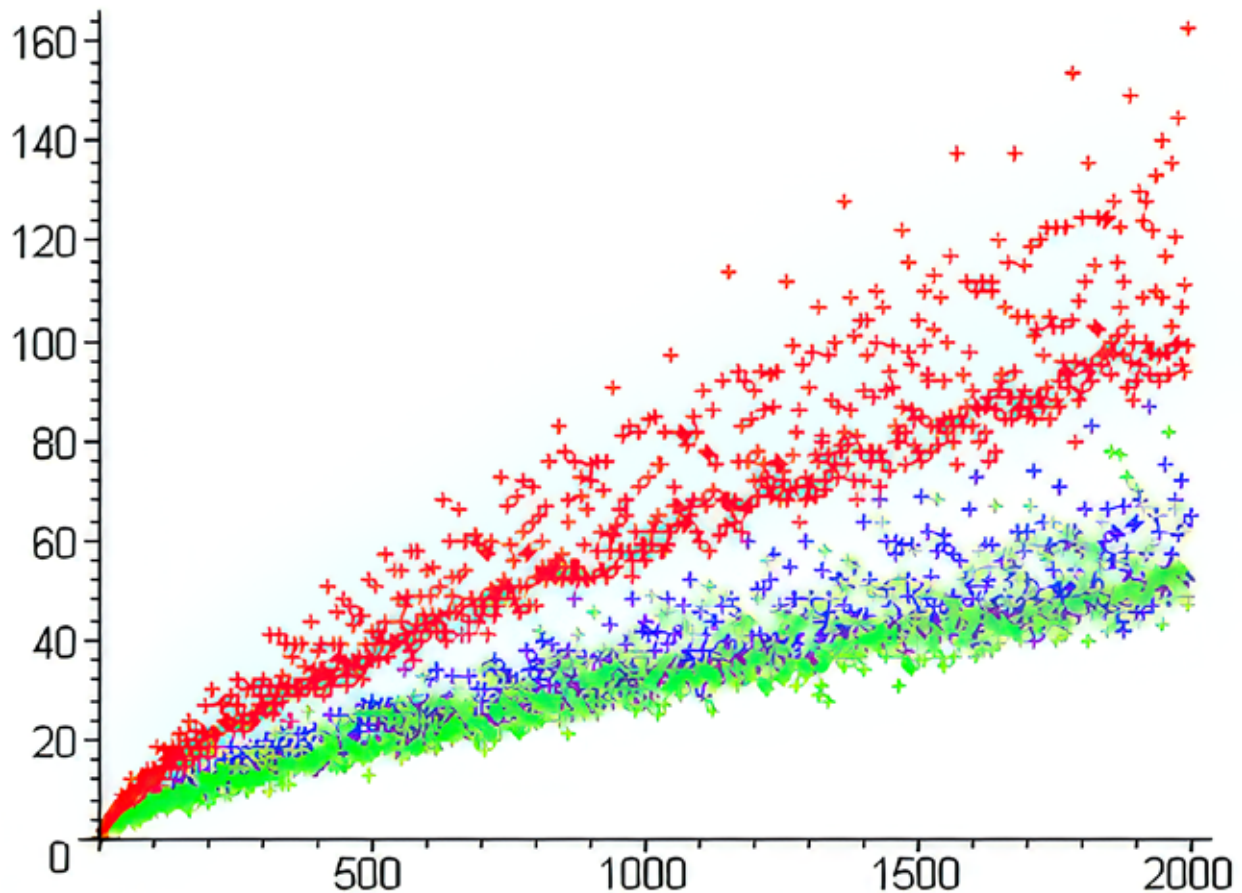


Tanmateix, demostrar que aquesta propietat es compleix per a tots els nombres parells constitueix un dels grans desafiaments de la teoria de nombres. Malgrat quasi tres segles d'esforços, ningú no ha trobat encara una demostració general, però tampoc no s'ha trobat un sol contraexemple.

Durant el segle XX es van obtenir importants avanços parcials. En 1937, el matemàtic rus **Ivan Vinogradov** va demostrar que tot nombre imparell prou gran pot expressar-se com a suma de tres nombres primers. Dècades més tard, en 2013, **Harald Helfgott** va completar la demostració per a tots els nombres imparells majors que 5, resolent així l'anomenada conjectura feble o ternària de Goldbach: tot nombre imparell major que 5 és suma de tres primers.

Pel que fa a la conjectura forta, el progrés també ha sigut notable, encara que insuficient. Gràcies a sofisticades tècniques de teoria analítica de nombres, mètodes de garbell i enormes verificacions computacionals, s'ha comprovat que la conjectura és certa per a tots els nombres parells fins a valors superiors a $4 \cdot 10^{18}$. Es tracta, sens dubte, d'un nombre enorme, però finit!

D'altra banda, resultats com el teorema de **Chen Jingrun**, demostrat en 1973, mostren fins a quin punt la teoria pot acostar-se a la conjectura forta. Chen va demostrar que tot nombre parell prou gran pot expressar-se com



El cometa de Goldbach. Representació gràfica del nombre de representacions de cada nombre parell com a suma de dos nombres primers fins a 2000 (font: Wikipedia). L'estructura resultant dona lloc a la característica forma de cometa. Segons la conjectura de Goldbach, per a cap nombre parell major que 2 el nombre de representacions pot ser zero. Aleshores, el cometa presentaria de sobte un forat en la seua cua. Els diferents colors distingeixen les tres classes aritmètiques dels nombres parells mòdul 6: els punts rojos corresponen als múltiples de 6, els blaus als nombres congruents amb 2 mòdul 6 i els verds als nombres congruents amb 4 mòdul 6. Curiosament, cadascuna d'aquestes classes defineix un cometa específic que ocupa majoritàriament una determinada regió del pla. (domini públic)

la suma d'un nombre primer i d'un altre nombre que és primer o producte de dos primers. Encara que aquest resultat no demostra la conjectura de Goldbach, constitueix un dels resultats parcials més pròxims coneguts a la seua formulació original.

La conjectura de Goldbach il·lustra com poques la diferència entre comprovar i demostrar. Encara que s'hagen verificat quantitats gegantines de nombres i tots els casos coneguts la confirmen, en matemàtiques una afirmació només es converteix en teorema quan es troba una demostració vàlida per a tots els casos possibles. Aquesta recerca d'una prova definitiva ha convertit la conjectura en un dels problemes oberts més cèlebres de les matemàtiques.

Una altra cèlebre conjectura, la conjectura de Polignac, planteja un problema relacionat amb la distribució dels nombres primers. Formulada el 1849 pel matemàtic francès Alphonse de Polignac, afirma que, per a tot nombre parell positiu escrit com $2k$, on k és un nombre enter major que zero, existeixen infinites parelles de nombres primers la diferència dels quals és exactament $2k$. En aquest sentit, les conjectures de Goldbach

i de Polignac poden considerar-se, en certa manera, complementàries: una estudia com es relacionen els primers mitjançant sumes, mentre que l'altra ho fa mitjançant diferències.

El cas $2k=2$ es correspon amb la conjectura dels nombres primers bessons, segons la qual existeixen infinites parelles de primers que difereixen en dues unitats, com les parelles (3, 5), (11, 13) o (17, 19). Altres valors de k donen lloc a altres famílies de primers. Així, per a $k=2$, tenim parelles de primers que difereixen en quatre unitats, com (3, 7) i (13, 17), que s'anomenen nombres primers cosins. Si la diferència és de sis unitats ($k=3$), com en les parelles (5, 11) o (7, 13), s'anomenen nombres primers sexis. La conjectura de Polignac engloba així una família infinita de problemes sobre la distribució dels nombres primers. Encara que s'han aconseguit avanços espectaculars en aquest terreny, la conjectura de Polignac continua oberta.

Les conjectures de Goldbach i de Polignac mostren fins a quin punt qüestions que poden formular-se de manera senzilla, fins i tot en una sola frase, poden amagar alguns dels problemes més profunds de la teoria de nombres i de les matemàtiques en general.