

La conjectura dels primers bessons

Marc Noy

Professor emèrit de matemàtiques a la Universitat Politècnica de Catalunya

Recordem que un nombre enter és primer si és més gran que 1 i només pot ser dividit per 1 i per ell mateix. La llista dels nombres primers comença amb 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 ... És infinita, tal com es prova a la Proposició 20 del llibre IX dels *Elements* d'**Euclides**:

Suposem que només hi ha un nombre finit de primers, siguin aquests $p_1 < p_2 < \dots < p_n$, on $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5 \dots$. Considerem ara el nombre $N = p_1 p_2 \dots p_n + 1$. Si N és primer, llavors clarament és més gran que p_n , el suposat més gran, la qual cosa és una contradicció. Si no ho és, sigui p un divisor primer de N . Llavors p ha de ser un dels primers de la llista i, per tant, divideix el producte $p_1 p_2 \dots p_n = N - 1$. Com p divideix N i $N - 1$ ha de dividir la seva diferència, que és 1. Però això és una contradicció, ja que un primer no pot dividir 1.

Amb una diferència de llenguatge (els grecs ho pensaven tot geomètricament i els nombres eren longituds de segments), aquesta és la mateixa prova que expliquem avui als estudiants de primer any a la universitat i que té més de 2300 anys. Un altre resultat bàsic de l'aritmètica és que tot nombre positiu s'escriu de manera única com a producte de nombres primers. Quan arriben a la universitat, els estudiants pensen que aquest és un fet evident, i queden sorpresos quan aprenen que no és el cas i que cal demostrar-ho. Considerem, per exemple, el producte $2557889963 = 27449 \times 93187$, i suposem que hem comprovat que els dos factors són primers. Qui ens assegura que 2557889963 no es pot escriure com a producte d'altres (dos o més) primers? Doncs la Proposició 30 del llibre VII dels *Elements* d'**Euclides**, que diu que si un primer divideix un producte, llavors divideix algun dels factors. Les matemàtiques es van desenvolupar antigament a Mesopotàmia, Egipte, la Xina, i l'Índia, però el raonament matemàtic tal com l'entenem avui és, sense discussió, obra de la Grècia clàssica, entre el segle VI i III a.n.e.

Aquí parlarem d'un famós problema de nombres primers que encara no està resolt. Un parell de primers són bessons si difereixen en dues unitats, com per exemple (3, 5), (11, 13), (29, 31), (137, 139) o (461, 463). La famosa Conjectura dels Primers Bessons (que abregem com a CPB) diu:

(CPB) *Hi ha un nombre infinit de parells de primers bessons.*

La conjectura és deguda a **Alphonse de Polignac**, un obscur matemàtic francès del segle XIX. De fet, al seu treball de 1849, Polignac va conjecturar encara més: per a tot nombre parell $k > 1$, hi ha infinits parells de primers que difereixen exactament en k unitats. El cas $k = 2$ és la conjectura CPB. La dificultat del problema rau en el fet que els nombres primers es defineixen per una propietat multiplicativa (no tenir divisors propis) i ens interessem per una propietat additiva, que difereixin exactament en dues unitats. El mateix fenomen passa amb la famosa conjectura de Goldbach (que es tracta en un altre article d'aquest volum), segons la qual tot nombre parell més gran que 2 és suma de dos nombres primers.

Recordem que una sèrie infinita de nombres reals positius $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$ és convergent si totes les sumes parcials $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ són menors que un nombre fix M ; altrament, la sèrie és divergent. Per exemple $1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + \dots$ (l'anomenada sèrie harmònica) és divergent, mentre que la suma dels inversos dels quadrats $1 + 1/4 + 1/9 + 1/16 + 1/25 + \dots$ és convergent.

Hi ha unes quantes proves de la infinitud dels primers, a més de la d'**Euclides**. Una molt interessant (lligada a la hipòtesi de Riemann, la conjectura més famosa de les matemàtiques) és que la suma $1/2 + 1/3 + 1/5 + 1/7 + 1/11 + \dots$ dels recíprocs dels primers és divergent, ja que si hagués només un nombre finit de primers la sèrie seria una suma finita. En canvi, l'any 1919 el matemàtic noruec Viggo Brun va provar que la suma $(1/3 + 1/5) + (1/5 + 1/7) + (1/11 + 1/13) + \dots$ dels recíprocs dels primers bessons és convergent. No sabem si la suma té infinits termes; aquesta és precisament la conjectura CPB. Tanmateix, que la suma siga finita reflecteix el fet que els primers bessons, encara que finalment n'hi hagi un nombre infinit, són molt escassos entre tots els nombres primers.

Després de 175 anys i d'innombrables esforços, la conjectura CPB resta oberta. Però no fa molt hi va haver un avenç sensacional. **Yitang Zhang** va provar l'any 2013 que hi ha infinits parells de primers bessons tals que la seva diferència és menor que 70 000 000. És un nombre molt gran però era la primera vegada que es provava un resultat d'aquest tipus amb un constant. Poc després, **James Maynard** va simplificar els mètodes de Zhang i va reduir aquesta enorme constant a 600. Al mateix temps, un projecte col·laboratiu liderat per **Terence Tao** la va reduir encara més, fins arribar a 246.



A dalt: a l'esquerra Yitang Zhang, la dreta James Maynard. A baix, Terence Tao a l'actualitat i una imatge de Tao quan tenia 10 anys amb Paul Erdős, un dels grans matemàtics del segle XX. (wikipedia)

El mètode de Zhang és massa complex per intentar explicar-ho i només pot ser entès pels especialistes en teoria analítica de nombres (no és pas el meu cas). En tot cas, direm que es basa en una versió molt refinada del sedàs d'**Eratòstenes** (el mateix que va mesurar la circumferència de la Terra amb una precisió del 98 %, un altre cop la Grècia clàssica!) per obtenir la llista dels primers fins a una certa quantitat N . Primer esborrem els nombres parells entre 2 i N , després els múltiples de 3, que és el primer nombre no esborrat. Després esborrem el següent encara no esborrat, que és el 5, i els seus múltiples, i així fins arribar a N . Al final del procés, al sedàs només queden els primers més petits que N . Zhang utilitza aquesta idea per estimar amb precisió la quantitat de primers dins una progressió aritmètica (una seqüència de nombres de la forma $a, a + d, a + 2d, a + 3d \dots$), un element clau en la seva solució.

Acabarem amb uns comentaris sobre els protagonistes més recents de la nostra història. Yitang Zhang va néixer a la Xina el 1955. Dels 10 als 20 anys, durant la Revolució Cultural, és forçat amb la seua mare a treballar al camp, de manera que no va poder cursar l'ensenyament secundari. Després d'aquest duríssim període, aconsegueix entrar a la Universitat de Pekin, on obté el títol de màster l'any 1984. L'any 1985 obté una beca per anar als Estats Units i es doctora el 1991. Durant

uns quants anys no aconsegueix trobar una plaça acadèmica i malviu amb treballs mal pagats. El 1999 és contractat com a professor a la Universitat de New Hampshire, on treballa en teoria de nombres, desconegut de tothom. L'any 2013 obté el seu resultat trencador i a partir d'aquí se li obren totes les portes. El fan catedràtic l'any següent i després d'uns anys a les millors universitats del país, el 2025 torna a la Xina com a professor a la Universitat **Sun Yat-sen** a Guangzhou (Canton). James Maynard ha tingut una carrera convencional. Nascut el 1987 a Anglaterra, estudia a Cambridge i es doctora a Oxford l'any 2013, universitat on actualment n'és professor. Cal remarcar que el seu resultat sobre els primers bessons el va obtenir mentre feia el doctorat. Després d'una progressió fulgurant, el 2022 guanya la medalla Fields (la màxima distinció en matemàtiques, que es concedeix cada quatre anys a matemàtics menors de 40 anys) per "avanços fonamentals en la comprensió de l'estructura dels nombres primers".

Terence Tao és considerat per molts com el més gran matemàtic de l'actualitat. Nascut a Austràlia l'any 1976, va ser un nen prodigi en matemàtiques. Professor a la Universitat de Califòrnia a Los Angeles, va rebre la medalla Fields el 2006, entre altres motius per demostrar amb **Ben Green** (Oxford) que la sèrie dels nombres primers conté progressions aritmètiques arbitràriament llargues.